Libro para el maestro

Matemáticas

Secundaria

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA | SEP

El *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria* fue elaborado en la Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal de la Secretaría de Educación Pública

Supervisión técnica y pedagógica
Dirección General de Materiales y Métodos Educativos
de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal

Coordinación general
Jesús Alarcón Bortolussi
Autores
Jesús Alarcón Bortolussi
Elisa Bonilla Rius
Rocío Nava Álvarez
Teresa Rojano Cevallos
Ricardo Quintero
Asesor académico
Juan José Rivaud
Colaboradores
Alfonso Arriaga Coronilla
Higinio Barrón Rodríguez

Coordinación editorial
Elena Ortiz Hernán Pupareli
Diseño
Mauro Calanchina Poncini
Cuidado de la edición
José Agustín Escamilla Viveros
Lourdes Escobedo Muñoz
Colaboración
Martha Tappan Velázquez
Luis Felipe Brice Mondragón
Ricardo Morales Pozos
Formación
Leticia Dávila Acosta
Julio César Olivares
Mónica Jacquelinne Velázquez Reyes
Diseño de portada
Fernández Cueto Editores, S.A. de C.V.
Fotografía de portada
Leopoldo Aguilar

Primera edición, 1994
Segunda edición, 2001
Segunda reimpresión, 2004 (ciclo escolar 2004-2005)

ISBN 970-18-6655-X

Impreso en México

Índice

Presentación

La Secretaría de Educación Pública ha preparado este libro para los profesores de matemáticas de educación secundaria del país, y lo entrega gratuitamente como un apoyo que busca la consolidación de la calidad de la educación.

En su primera edición en 1994, este *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria* fue concebido como un primer esfuerzo de fortalecimiento del trabajo docente de los profesores de matemáticas de educación secundaria; al que se le han venido sumando otros materiales de apoyo como *Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación secundaria* y el *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria.*

A la par de la producción de materiales de apoyo, la Secretaría de Educación Pública revisa constantemente los materiales que entrega a los profesores; para ello toma en cuenta los comentarios de los maestros, las exigencias que se presentan en la sociedad y los avances en el campo de la educación matemática.

En esta nueva edición del *Libro para el maestro. Educación básica. Secundaria* se enriquece el capítulo referido al enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, propuesto en el *Plan y programas de estudio. Educación básica. Secundaria*. Con base en la experiencia acumulada se realizaron algunas modificaciones, por ejemplo: se revisó la estructura, se organizaron las actividades y problemas y se actualizaron los datos.

El profesor podrá encontrar en este libro orientaciones concretas respecto al tratamiento de los contenidos matemáticos para cada una de las cinco áreas en que están organizados los temas en los programas de estudio, así como diversas actividades y problemas que en su mayoría fueron diseñados para los alumnos de educación secundaria; no se tratan todos los temas señalados en los programas de estudio, pero si los que presentan mayores y más frecuentes dificultades para los alumnos.

Este libro no pretende señalar al profesor lo que debe hacer en cada una de sus clases. El reconocimiento de la experiencia y la creatividad del profesor fue el punto de partida para la preparación de este material. Por esta razón, las propuestas didácticas que se incluyen son abiertas y ofrecen amplias posibilidades de adaptación a las formas de trabajo de cada profesor, a las condiciones en que labora y a las necesidades y dificultades de aprendizaje de los alumnos.

Las subsiguientes ediciones de este libro deberán ser corregidas y mejoradas a partir de los resultados de su utilización en la práctica. Para lograr este propósito se invita a los profesores a enviar sus observaciones y propuestas a esta Secretaría.

Introducción

El *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria* es un material de apoyo dirigido a los profesores de la asignatura, de los tres grados de la educación secundaria, en el que se desarrolla el enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, propuesto en el *Plan y programas de estudio. Educación básica. Secundaria.* Cuenta con seis capítulos, titulados: "Enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria", "Aritmética", "Álgebra", "Geometría", "Presentación y tratamiento de la información" y "Nociones de probabilidad".

El propósito principal de este libro es enriquecer los recursos de que dispone el profesor para ayudar a sus alumnos a estudiar matemáticas. El enfoque didáctico actual revalora el trabajo profesional del maestro, en tanto que su labor no se limita a transferir información y calificar el desempeño de sus alumnos, sino que implica, sobre todo, analizar situaciones relacionadas con los contenidos, organizar secuencias que favorezcan la evolución de los procedimientos de los alumnos, plantear problemas, socializar diferentes estrategias de resolución y evaluar diferentes aspectos del proceso didáctico.

Por ello, en el primer capítulo se explican los propósitos del estudio de las matemáticas en la educación secundaria, así como algunos aspectos del enfoque didáctico como el papel de los problemas, el trabajo en equipo, la confrontación, el papel del profesor y la evaluación, entre otros. En los siguientes cinco capítulos se dan orientaciones concretas respecto al tratamiento didáctico de los contenidos de las cinco áreas señaladas en los programas de estudio, así como una abundante colección de actividades y problemas que el profesor, con base en su experiencia y creatividad, podrá modificar, enriquecer y llevar a cabo en su salón de clases.

Estructura de los capítulos

Cada uno de los capítulos referidos a las áreas temáticas inicia con un apartado en el que se ubica el área de estudio en el contexto de la educación secundaria, excepto "Geometría" y "Nociones de probabilidad", que presentan un apartado introductorio, previo a éste, donde se reseña brevemente el desarrollo histórico de estas ramas de la matemática.

Cada capítulo presenta distintos apartados específicos del área que se trata, por ejemplo, el capítulo "Presentación y tratamiento de la información" contiene los siguientes cuatro apartados: Tablas y gráficas; Cantidades absolutas y relativas; Descripción de una lista de datos y Tratamiento de la información y las funciones.

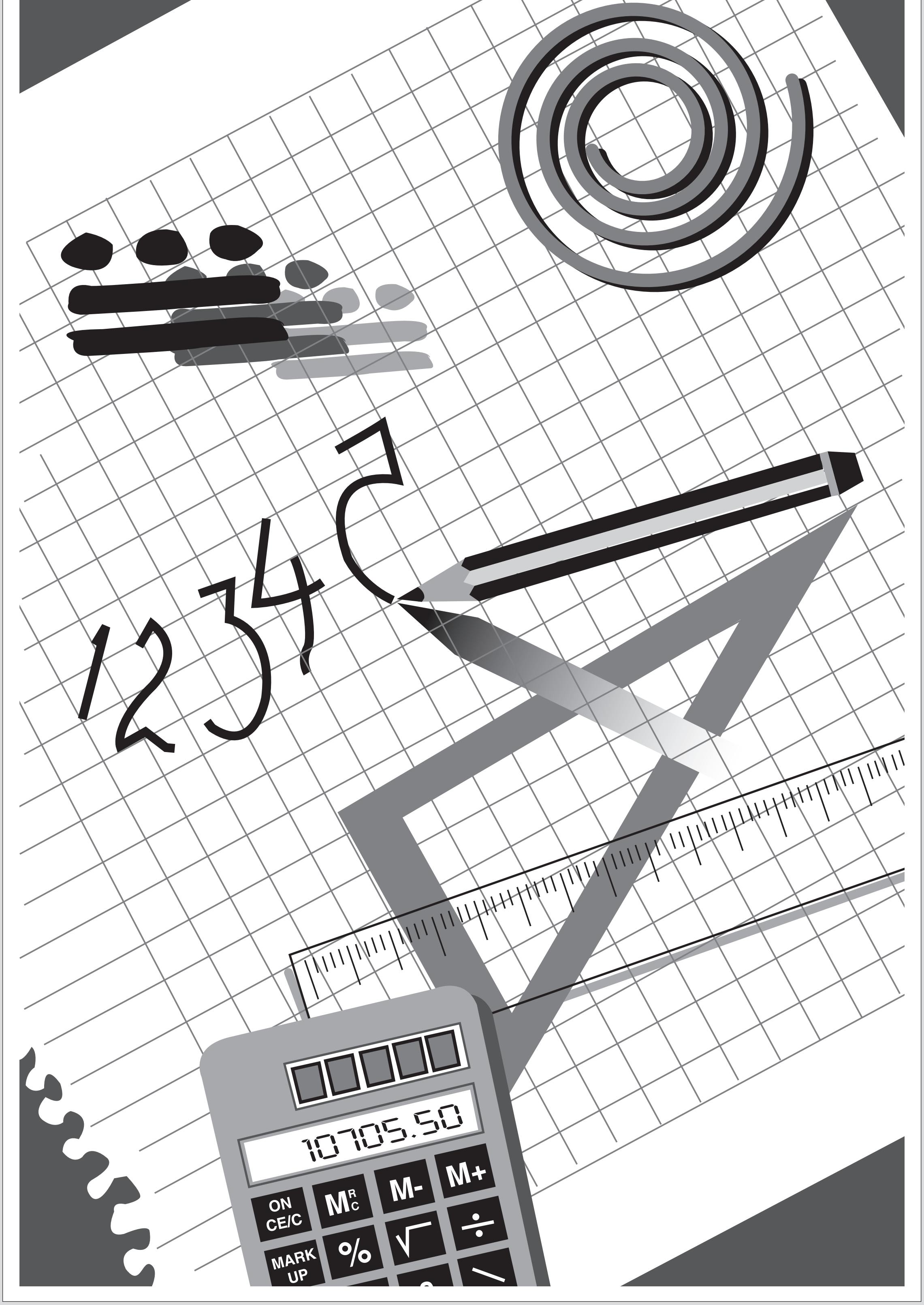
Cada uno de los apartados incluye otros más pequeños donde se comentan distintas ideas respecto a la disciplina y su tratamiento didáctico, por ejemplo, el apartado de Tablas y gráficas, incluye otros dos: Uso de tablas y Gráficas de uso frecuente.

Las ideas desarrolladas en cada uno de estos apartados se acompañan de problemas que concretan lo expuesto, es decir, el discurso es constantemente reforzado por los problemas que ejemplifican lo que se está diciendo. Por ello es recomendable realizar primero una lectura general de cada capítulo y después una lectura cuidadosa de cada apartado, en el cual se analicen los problemas planteados.

Los distintos materiales de apoyo como un paquete integrado didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria

Si bien este libro puede ser utilizado de manera independiente, se recomienda concebirlo como parte del paquete básico de materiales de apoyo que la SEP ofrece a los profesores de matemáticas de educación secundaria. Algunas de las actividades y problemas propuestos pueden ser adaptados por los profesores para diseñar secuencias didácticas, como se hizo en el fichero de actividades didácticas. Por ejemplo, la ficha "Tarjetas numéricas" (p. 10) respecto al problema 2 de la página 39 de este libro.

Por otra parte, la *Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación secundaria* ubica en cada uno de los 18 temas propuestos para cada grado, las actividades y problemas planteados aquí a fin de darle coherencia al proceso de estudio que desarrollan los alumnos durante los tres grados escolares de educación secundaria.



Enfoque

Enfoque

Enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria

La importancia de las matemáticas en la vida diaria

El hombre siempre ha tenido la necesidad de explicarse el universo y las cosas que en él ocurren. Desde que aprendió a contar hasta la teoría del caos, el ser humano ha expresado por medio de las matemáticas su capacidad creativa, su necesidad de evolución y trascendencia.

Actualmente, las matemáticas son una herramienta fundamental para el desarrollo de las disciplinas científicas y técnicas. Asimismo la industria, la prestación de servicios a gran escala, los medios de comunicación, el deporte de alto rendimiento, la música y el arte recurren, día a día, cada vez más a las matemáticas.

El vertiginoso desarrollo de nuevas tecnologías, como las computadoras, se debe, sin duda, a las matemáticas.

Por ello, una de las características de las matemáticas en la actualidad es su uso en prácticamente todas las áreas del quehacer humano, desde las actividades cotidianas hasta la investigación científica, la producción y la prestación de servicios.

El ser humano tiene la necesidad constante de crear y fortalecer sus conocimientos matemáticos, y esto es cierto tanto para los profesionales y los especialistas en diversas disciplinas, como para el ciudadano común.

Acorde con esta realidad, las matemáticas son, hoy en día, una de las ciencias más activas y dinámicas; a partir de problemas que surgen en otras disciplinas, nuevas teorías son creadas para encontrarles solución. También aparecen dentro de su seno, nuevas formas de ver y atacar viejos problemas, desarrollándose así tanto las matemáticas puras como las aplicadas.

En realidad, no es posible trazar una línea que separe claramente ambos tipos de matemáticas, ya que los problemas prácticos conducen con frecuencia a teorías que aparecen completamente alejadas de sus aplicaciones, mientras que las matemáticas puras modifican nuestra visión de la realidad y nos hacen descubrir nuevas aplicaciones y problemas concretos donde antes no los veíamos.

Las matemáticas no son ocupación exclusiva de un grupo reducido de especialistas, a su creación contribuye el quehacer colectivo de las sociedades. Un ejemplo lo constituye el desarrollo de los sistemas de numeración y el uso de la geometría en el arte decorativo y en la arquitectura de la antigüedad. Este aspecto de las matemáticas tiene implicaciones importantes para la educación: el estudio y la creación de las matemáticas está al alcance de todo ser humano.

Propósitos del estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria

En este escenario, el estudio de las matemáticas en la educación secundaria es fundamental para la formación de los estudiantes.

El estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria persigue propósitos esencialmente formativos que consisten en:

- Desarrollar habilidades
- Promover actitudes positivas
- Adquirir conocimientos matemáticos

Estos propósitos forman un todo en relación dialéctica, es decir, que el avance o retroceso de uno de ellos repercute, de alguna manera, en otro.

Aquí se han listado solamente con fines de organización y no para señalar una jerarquía.

1. Desarrollar habilidades

Como se señala en el plan de estudios vigente, con el estudio de las matemáticas en la educación secundaria se pretende que los estudiantes desarrollen habilidades operatorias, de comunicación y de descubrimiento, para que puedan aprender permanentemente y con independencia, así como resolver problemas matemáticos de diversa índole.

Es frecuente que el término habilidad se confunda con los de capacidad y destreza. Para nuestros fines, hablamos de capacidades cuando nos referimos a un conjunto de disposiciones de tipo genético que, una vez desarrolladas por medio de la experiencia que produce el contacto con un entorno culturalmente organizado, darán lugar a habilidades individuales (Monereo, 1998).

Las habilidades son las posibles variaciones individuales, en el marco de las capacidades, que pueden expresarse en conductas en cualquier momento, porque han sido desarrolladas por medio de su uso, y que además pueden utilizarse o ponerse en juego, tanto consciente como inconscientemente, de forma automática.

Por destreza nos referiremos a la agilidad que pueden tener los estudiantes en la aplicación de ciertas técnicas manuales.
En la educación secundaria se busca desarrollar, entre otras:

- La habilidad de *calcular*, que consiste en establecer relaciones entre las cifras o términos de una operación o de una ecuación para producir o verificar resultados.
- La habilidad de *inferir*, que se refiere a la posibilidad de establecer relaciones entre los datos explícitos e implícitos que aparecen en un texto, una figura geométrica, una tabla, gráfica o diagrama, para resolver un problema.
- La habilidad de *comunicar*, que implica utilizar la simbología y los conceptos matemáticos para interpretar y transmitir información cualitativa y cuantitativa.
- La habilidad de *medir*, que se refiere a establecer relaciones entre magnitudes para calcular longitudes, superficies, volúmenes, masa, etcétera.
- La habilidad de *imaginar*, que implica el trabajo mental de idear trazos, formas y transformaciones geométricas planas y espaciales.
- La habilidad de *estimar*, que se refiere a encontrar resultados aproximados de ciertas medidas, de operaciones, ecuaciones y problemas.
- La habilidad de *generalizar*, que implica el descubrir regularidades, reconocer patrones y formular procedimientos y resultados.
- La habilidad para *deducir*, que se refiere a establecer hipótesis y encadenar razonamientos para demostrar teoremas sencillos.[1]

2. Promover actitudes positivas

Los valores de las personas se expresan de diversas maneras y por distintos medios; lo que hacemos, decimos, sentimos y pensamos refleja de alguna manera los valores que hemos asumido en la vida, estas expresiones se manifiestan por medio de las actitudes.

Por actitud entendemos la conducta que se manifiesta de manera espontánea. En este sentido nos interesa que los estudiantes muestren interés ante las matemáticas, para ello, en y desde la clase de matemáticas es necesario fomentar actitudes como:

- La *colaboración*, que implica asumir la responsabilidad de un trabajo en equipo.
- El *respeto* al expresar ideas y escuchar las de los demás.
- La *investigación*, que significa buscar y verificar diferentes estrategias para resolver problemas.
- La *perseverancia* la entedemos como el llevar a buen término el trabajo aun cuando los resultados no sean los óptimos.
- La *autonomía* al asumir la responsabilidad de la validez de los procedimientos y resultados.

[1] Hugo Balbuena, ponencia presentada en el foro "Las matemáticas: educación y desarrollo", Cocoyoc, 1998.

- Una *sana autoestima*, que implica reconocer el valor del trabajo propio, para fortalecer la seguridad personal.

3. Adquirir conocimientos matemáticos
Por supuesto que la clase de matemáticas tiene como tarea específica el estudio de la disciplina, pero no en el sentido de formar *pequeños matemáticos*, sino de consolidar el proceso de formación básica a fin de lograr una cultura matemática significativa y funcional, es decir, que puedan usarla en las diversas actividades que realizan cotidianamente.

Los temas matemáticos que se estudian en la educación secundaria se presentan en el *Plan y programas de estudio. Educación básica. Secundaria* agrupados en cinco áreas:

- Aritmética
- Álgebra
- Geometría (en el tercer grado se agrega trigonometría)
- Presentación y tratamiento de la información
- Nociones de probabilidad

Estas áreas de contenido que a la vez son ramas de la matemática, aglutinan y le dan cierta dosis de formalidad a los ejes temáticos que se estudian en preescolar y primaria. Así, mientras en el nivel de primaria hay un eje que se llama Los números, sus relaciones y sus operaciones, en preescolar el estudio se circunscribe al estudio del número y algunas relaciones aditivas y multiplicativas muy simples. Mientras que en la educación secundaria Aritmética no sólo incluye a los números, sus relaciones y sus operaciones sino también a los procesos de cambio.

Un ejemplo más es el de los ejes de Geometría y medición de la educación primaria, cuyo estudio también se propone en preescolar, pero limitado a ciertas relaciones espaciales, características generales de figuras y cuerpos y escasas magnitudes muy ligadas a la vida de los niños. Mientras que en la educación secundaria, todo ello se aglutina en el área de Geometría, y trasciende al estudio de ciertas nociones de trigonometría.

Para el logro de estas metas, el *Plan y programas de estudio. Educación básica. Secundaria* presenta un enfoque didáctico, el cual se detalla aquí.

Consolidar el proceso de estudio de las matemáticas iniciado en la educación preescolar y primaria

Cuando los estudiantes llegan a la educación secundaria ya han logrado desarrollar ciertas habilidades, conocimientos y actitudes, en el campo de las matemáticas; por ejemplo, han aprendido a comunicar e interpretar, han explorado diversas situaciones con las operaciones básicas, han utilizado las fracciones y los decimales; han estudiado algunas propiedades de las figuras y cuerpos geométricos y han aprendido a organizar la información usando y tablas y gráficas, entre otras cosas.

En la educación secundaria es necesario que las actividades y problemas que se propongan consoliden el proceso de estudio iniciado en preescolar y primaria, consideren el desarrollo intelectual de los estudiantes, los procesos que siguen y las dificultades que enfrentan para adquirir dichos conocimientos y, a su vez, enlacen las experiencias y aprendizajes adquiridos en la vida cotidiana, y la forma en que han arribado a ellos, con el estudio de los temas de matemáticas señalados en los programas de estudio.

En toda la educación básica se mantiene el mismo enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en el que la resolución de problemas juega un papel fundamental.

El papel de los problemas en el estudio de las matemáticas

Hablar de *resolver problemas* puede parecer no del todo novedoso, ya que los problemas matemáticos han estado presentes desde hace mucho tiempo en cualquier curso de matemáticas. Con la propuesta actual se intenta superar el estilo docente fuertemente arraigado en el que los problemas son el lugar de aplicación de los procedimientos y técnicas aprendidas previamente, es decir, un estilo docente en el que el profesor resuelve problemas frente a los alumnos y éstos sólo tratan de reproducir lo que hace el profesor.

Durante mucho tiempo imperó la idea que el aprendizaje de las matemáticas se logra proporcionando a los alumnos primero definiciones y procedimientos de problemas modelo explicados por el profesor, o tomados de un libro de texto, haciendo que posteriormente los alumnos ejerciten una y otra vez dichos procedimientos hasta lograr que los puedan repetir con el mínimo de errores.

Bajo este esquema se plantean problemas matemáticos como un enunciado escrito que debe ser completado con un dato, y fuera de un contexto que permita descubrir su significado y utilidad, es decir problemas en los que se aplica un mecanismo predeterminado ya conocido, por ejemplo:

Resolver

$$\frac{x[-(3x + 4x)(x - 2)^2]}{-\{-[-(-x^3)\}} =$$

En la misma tónica se cree que a la *enseñanza* del profesor le corresponde directamente el *aprendizaje* de los alumnos, el profesor es quien tiene los conocimientos y los debe transmitir a quienes con sólo escuchar explicaciones, memorizar conceptos y definiciones y ejercitarse resolviendo una gran cantidad de ejemplos del mismo tipo, habrán aprendido matemáticas.

La experiencia demuestra que esto no es así, las matemáticas se fueron convirtiendo para los alumnos en algo incomprensible, tedioso, alejado de sus necesidades e intereses y con una cada vez mayor animadversión. Una manifestación de esta situación la encontramos cuando un alumno pregunta a su profesor: *¿y esto para qué me servirá?*

Diversas investigaciones han demostrado que con este estilo docente los alumnos no logran conocimientos significativos; los conceptos y procedimientos explicados por el profesor les resultan ajenos, carentes de sentido y significado, por lo que ha sido necesario invertir el proceso en que tradicionalmente se ha procedido.

Un aprendizaje significativo de las matemáticas no puede reducirse a la memorización de hechos, definiciones y teoremas, ni tampoco a la aplicación mecánica de ciertas técnicas y procedimientos.

Con base en la propuesta curricular actual se pretende arribar a un estilo docente en el que el profesor organice el proceso de estudio analizando y eligiendo situaciones problemáticas para dejarlas en manos de los estudiantes y una vez que éstos han encontrado formas de resolver el problema, favorezca la socialización y confrontación para seguir avanzando.

El profesor en su papel de guía puede y debe, en ciertos casos, enriquecer los hallazgos de los estudiantes. La ventaja es que en estos casos, las explicaciones que agrega el profesor no quedan desligadas de los saberes previos de los estudiantes y en consecuencia dejan de tener el carácter de *recetas mágicas* inventadas por algún iluminado.

No se pretende *hacer fáciles* las matemáticas (¿será esto posible?), sino de provocar el interés por su estudio y lograr aprendizajes significativos proponiendo situaciones interesantes, que impliquen un reto y que en su proceso de resolución logren ir aprendiendo y consolidando diversas nociones, así como el uso de los procedimientos convencionales y de distintos recursos como tablas y gráficas, al tiempo que se apropian del lenguaje matemático.

Por problema nos referimos a una situación que presenta un reto, un desafío, ante el cual, el alumno que intenta responderlo no dispone de un recurso expedito y, por tanto, debe buscar, ensayar, establecer relaciones, analizar sus efectos, elaborar conjeturas, probarlas y validarlas.

Para ello es necesario que los problemas que se propongan a los estudiantes:

- Sean para ellos un reto interesante y provoquen rápidamente una actitud de búsqueda, orientada a proponer conjeturas y posibles estrategias de resolución.
- Les permita explorar las relaciones entre nociones conocidas y posibilite avanzar hacia la comprensión y asimilación de nuevos conocimientos.

- Contengan los elementos que permitan validar sus propias conjeturas, procedimientos y soluciones, o desecharlas cuando sean incorrectas.

Enfrentar a los estudiantes a problemas propicia que:

- Construyan sus conocimientos al usar estrategias convencionales y no convencionales que los resuelvan.
- Apliquen y profundicen los conocimientos adquiridos anteriormente.

El ambiente de estudio en el aula

Como ya se ha dicho, los estudiantes no deberán ser meros receptores pasivos de las explicaciones del profesor, o solamente ejercitarse en la aplicación de las técnicas y procedimientos convencionales, es necesario ceder el papel protagónico de la clase a los estudiantes. Se pretende que el profesor seleccione y plantee problemas de acuerdo con los propósitos y deje que los estudiantes los resuelvan sin indicarles caminos preestablecidos; ante un problema, los estudiantes deberán aprender a expresar sus ideas, a explicar a sus compañeros cómo lograron resolverlo, a discutir defendiendo sus estrategias de resolución, así como a reconocer sus errores.

La clase de matemáticas debe ser un espacio de libertad con responsabilidad, el cual depende en gran medida del profesor. Las actividades en clase deberán realizarse en un ambiente estimulante, de colaboración y respeto mutuo, donde los estudiantes tengan la oportunidad de expresar su pensamiento, comunicar y discutir sus ideas, sin temores, al mismo tiempo que se apropian gradualmente del vocabulario y de los medios de expresión que proporcionan las matemáticas, por ejemplo, el uso de símbolos y los diversos modos de representación gráfica o en tablas.

La comunicación de ideas, tanto en forma oral como escrita, juega un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas porque exige de los estudiantes una comprensión más profunda de los conceptos y principios involucrados, al mismo tiempo que el profesor conoce el razonamiento que siguen los estudiantes para resolver un problema, lo que le permite determinar las actividades que refuercen el estudio de algún contenido o proponer situaciones para favorecer la adquisición de nuevos conocimientos y continuar el proceso de estudio.

El profesor debe ser muy respetuoso con los estudiantes en todos los sentidos, escuchando atentamente a todos por igual, y promoviendo la mayor participación posible, así como el respeto entre ellos mismos.
La forma en que el profesor trata a los estudiantes, la forma en que se dirige a ellos, les dejará, ciertamente, una profunda huella.

En algunos momentos el estudio que se desarrolla durante la clase de matemáticas requerirá del movimiento de los estudiantes dentro o fuera del aula, por ejemplo, al trabajar en equipos, o al desarrollar alguna actividad en la que se requiera desplazarse. También es muy natural el *ruido* provocado por las interacciones de los alumnos. El profesor no debe preocuparse tanto por mantener una disciplina rígida que no permita la participación de sus alumnos.

El tipo de situaciones problemáticas propuesto

Para seleccionar un problema y plantearlo en la clase es necesario que el profesor tenga claro qué propósito se persigue; que haya resuelto el problema antes de plantearlo a los estudiantes, haga las adecuaciones que considere convenientes, prevea el material que utilizarán y la forma en que organizará al grupo.

Es común escuchar que para el estudio de las matemáticas se debe recurrir a problemas de la vida cotidiana, con el fin de despertar el interés de los estudiantes y que perciban la utilidad de las matemáticas. Si bien esto es cierto, no hay que olvidar que existen otras situaciones divertidas e interesantes que también se pueden aprovechar para que los alumnos construyan y avancen en sus conocimientos, por ejemplo, los juegos matemáticos; situaciones asociadas con la fantasía, y los problemas puramente numéricos, algebraicos o geométricos.

Enfrentar a los estudiantes a un problema de la vida cotidiana no resulta del todo fácil, porque se puede plantear problemas muy sencillos y limitados o muy complejos, que al final de cuentas resolverá el profesor; en otras ocasiones los problemas propuestos contienen muchas variables que se discriminan, convirtiendo las situaciones *reales* en ficticias.

En los siguientes capítulos de este libro, el profesor encontrará una gran cantidad de problemas en contextos muy variados. La mayoría de estos problemas fue diseñada para los alumnos. En la *Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación secundaria* estos problemas son ubicados en los distintos temas para cada uno de los grados escolares.

Conviene que el profesor varíe la presentación de los problemas. Puede, por ejemplo, mostrar ilustraciones a partir de las cuales se formulen preguntas, también puede plantear problemas a partir de situaciones presentadas en los videos de apoyo, El Mundo de las Matemáticas y Resuélvelo, que se encuentran en las videotecas de todas las escuelas secundarias.

Algunas veces, la actividad puede consistir en que los estudiantes elaboren preguntas que se resuelvan con la información contenida en un texto o en una ilustración; otras veces, el profesor puede plantear problemas a partir de la manipulación de material concreto, con el uso de la calculadora o utilizando ciertos programas (*software*) en la computadora.

Se recomienda que el profesor proponga ocasionalmente algunos problemas que tengan diferentes respuestas correctas, a fin de que los estudiantes valoren las variantes que ocasionan esta diversidad de resultados y que no piensen que todos los problemas tienen solamente una solución.

El juego como recurso didáctico

Jugar es una actividad interesante para las personas de diferentes edades y es una parte importante en la vida de los adolescentes. En la educación secundaria se pueden aprovechar diversos juegos para favorecer el aprendizaje de las matemáticas.

Pero hay que estar atentos, pues si bien los juegos son situaciones que resultan divertidas e interesantes para los alumnos, no todos los juegos favorecen la construcción de conocimientos matemáticos.

Para aprovechar las posibilidades que ofrecen algunos juegos, el profesor debe cuidar de no convertirlos simplemente en situaciones recreativas para pasar el rato y mucho menos para perder el tiempo. Cuando los estudiantes juegan se divierten, platican, discuten y hacen ruido, pero no hay que perder de vista el propósito que se persigue al plantear determinado juego, y así lograr hacer matemáticas de una manera agradable.

Algunos padres de familia y profesores se preocupan de que los estudiantes jueguen durante la clase debido a que desconocen las ganancias que se obtienen, por ejemplo, el juego implica competencia, y en el afán de ganar los estudiantes tienden a ser autónomos, construyen sus propias estrategias y analizan cuidadosamente sus resultados. Los problemas que el profesor proponga por medio de los juegos deberán ser retos interesantes a partir de los cuales analicen lo que ocurre en la situación y encuentren la mejor estrategia para ganar, introduciendo o profundizando ciertas nociones.

Más adelante, en este libro se proponen algunos juegos, por ejemplo, "Carreras con dados" (véase la página 342). También podrá encontrar otros juegos en el *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria* como "¿Qué tan cerca?" y "Juegos con dados" (pp. 14 y 82), entre otros.

Entre los materiales de apoyo para la educación primaria existen muchos juegos que, con algunas adaptaciones, pueden utilizarse en la educación secundaria. Se recomienda consultar el libro *Juega y aprende matemáticas* que forma parte de la colección Libros del Rincón, que puede consultar en los Centros de Maestros.

Materiales manipulables y las nuevas tecnologías

Actualmente existe una gran variedad de recursos que pueden utilizarse en la clase de matemáticas para plantear situaciones problemáticas interesantes, por ejemplo, en el *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria* se proponen actividades como el doblado de papel, el tangram, el geoplano, el geoespacio y el pantógrafo (pp. 18, 22, 52 y 108, respectivamente), periódicos, revistas, videos (por ejemplo, El Mundo de las Matemáticas y Resuélvelo), audios, la calculadora (véase la página 56 de este libro), la computadora, el uso de Internet, etcétera. Cada uno de ellos ofrece particulares ventajas que pueden favorecer el estudio de las matemáticas en la educación secundaria, si son utilizados adecuadamente.

Es importante que al utilizar estos recursos no se pierda de vista su carácter mediador y su uso se convierta en un fin en sí mismo. La función de los materiales manipulables y las nuevas tecnologías es servir como instrumentos para plantear nuevos problemas o para favorecer una mayor reflexión en torno a problemas planteados.

Con base en el tema que se esté estudiando y en función del problema por resolver, el profesor tendrá que decidir la pertinencia de usar uno u otro material.
Hoy día se resalta en muchos ámbitos educativos el uso de las nuevas tecnologías en el aula: el video, la calculadora y la computadora.

- El video, por su potencial comunicativo y por su facilidad de uso, se ha convertido en un recurso didáctico valioso. En la clase de matemáticas el video permite visualizar situaciones que de otra manera no sería posible acceder a ellas. Estas situaciones son una fuente rica en problemas que el profesor puede plantear a sus alumnos.
- Las formas de uso del video dependen de la creatividad y estilo personal en que el profesor decide proponer el estudio.
- La calculadora es una potente herramienta de cálculo que se utiliza con mucha frecuencia fuera de la escuela, y que puede ser usada por el profesor como un ambiente para plantear diversas actividades y problemas. Por ejemplo, el profesor puede plantear problemas interesantes y juegos con algunas restricciones, para que los estudiantes reflexionen sobre las propiedades de las operaciones básicas y exploren propiedades de los números. En otros casos, la calculadora favorece que los estudiantes se centren en los procesos de resolución de un problema más que en los cálculos mismos; descubran patrones en sucesiones numéricas; verifiquen sus resultados de manera inmediata. En otras palabras, la calculadora puede ser utilizada para retroalimentar el aprendizaje, profundizar algunas nociones y desarrollar ciertas habilidades.
- Las computadoras son procesadores de información que posibilitan el uso de diversos programas (software) útiles para el estudio de las matemáticas en la educación secundaria.

Cuando sea posible, conviene que el profesor use computadoras para plantear situaciones problemáticas interesantes a los estudiantes. Por ejemplo, la hoja electrónica de cálculo permite trabajar con tablas y gráficas para realizar un tratamiento de información útil para modelar diversas situaciones problemáticas. Para geometría existen diversos programas como Cabri (*Cabri Géométre*) o El geómetra (*The Geometer´s Sketchpad*) que permiten manipular los objetos geométricos, trazando y transformando figuras con lo que se logra un acercamiento práctico y experimental a la geometría.

Debe cuidarse de no usar la computadora como un simple tutorial en el que el alumno se encuentre con situaciones estáticas que no le permitan explorar problemas y que sólo le exijan responder preguntas de tipo meramente conceptuales o de problemas *tipo*.

- En Internet el profesor podrá encontrar además de una gran cantidad de información, la posibilidad de integrar a sus alumnos en diversos proyectos de estudio conjunto con otros estudiantes de educación secundaria de distintas regiones del país, en la red escolar de la SEP www.redescolar.ilce.edu.mx

Las tareas en casa

Es muy probable que en muchos casos sea insuficiente el tiempo destinado a una sesión de clase. Cuando esto suceda, puede dejarse una parte del trabajo para realizar en casa, con la condición de que no sea excesivo y que en la siguiente sesión sea revisado de manera colectiva.

Se pueden encomendar algunas investigaciones documentales o actividades que no se puedan realizar en clase, como encuestas u observaciones, así como actividades laboriosas como la construcción de algunos cuerpos o figuras geométricas que serán utilizadas como material para el estudio en la clase del día siguiente.

Se debe tener cuidado al proponer constantemente trabajo en casa por equipos, pues algunos adolescentes pueden usar esto, posteriormente, como un pretexto para salir de casa. Cuando el profesor requiera que los estudiantes realicen un trabajo en casa por equipos conviene que informe a los padres de esta situación.

La confrontación

Cuando los estudiantes tienen la libertad para buscar la manera de resolver un problema, por lo general desarrollan diversos procedimientos.

Es de gran utilidad promover que los estudiantes conozcan y analicen los procedimientos que siguieron sus compañeros para resolver un problema, pues de esta manera se evidencia que existen varias formas, algunas más largas y complicadas que otras. Les permite también percatarse de sus errores, así como valorar las estrategias y resultados propios y los de sus compañeros.

No se debe confundir la confrontación con la explicación por parte del profesor o como un momento para corregir y calificar resultados.

La confrontación es un momento clave en el desarrollo de cada clase, es el espacio dedicado para que los estudiantes reflexionen sobre lo que hicieron al realizar alguna actividad o resolver algún problema, para que hagan conciencia sobre lo que saben, lo que no saben, las dificultades que encontraron; para que aclaren dudas, compartan puntos de vista y argumenten la validez o no de las estrategias que siguieron.

Dada la importancia didáctica de la confrontación, ésta debe ser lo más ágil y breve posible para mantener la atención de los alumnos sin cansarlos. No es conveniente presentar los procedimientos y resultados de todos los estudiantes o equipos frente al grupo, ya que esto haría la clase aburrida, pero tampoco es necesario pues seguramente habrá algunos procedimientos semejantes. Conviene presentar sólo aquello que aporte elementos útiles. Por lo anterior, es importante que antes de llevarla a cabo el profesor tenga claro lo que persigue al confrontar, por ejemplo, que los estudiantes:

- Observen que un problema puede resolverse de diferentes maneras.
- Observen que algunos problemas pueden tener más de una respuesta correcta.
- Corrijan errores frecuentes.
- Analicen las ventajas de utilizar unos procedimientos en vez de otros, es decir, privilegiar el uso de ciertos procedimientos que se aproximen más al formal

La confrontación puede permitir que los jóvenes:

- Comprendan mejor las situaciones problemáticas planteadas.
- Comuniquen y defiendan su propio método de solución.
- Comprendan el proceso del otro, y sean capaces de descentrarse de su propia investigación, cuestionarla e interpretarla.
- Identifiquen las ventajas de ciertos procedimientos sobre otros.
- Se planteen nuevos problemas.

La confrontación no es un ejercicio simple ni fácil, representa un desafío para el profesor de matemáticas, pues requiere del dominio de los contenidos y de ciertas habilidades para plantear preguntas que favorezcan la discusión y la reflexión, por lo que conviene, desde la planeación de la clase, tratar de adelantarse y prever las posibles estrategias de los alumnos, los errores que puedan cometer y cuál de ellos conviene poner a consideración del grupo para la confrontación.

Los errores en la resolución de problemas y la validación de resultados

Cuando se resuelven problemas matemáticos en la escuela, los alumnos tienden a depender de la aprobación del profesor para saber si la forma en que los resolvieron es o no la correcta; sin embargo, es conveniente que ellos mismos reconozcan si el procedimiento que emplearon los llevó a la solución correcta del problema, verifiquen sus resultados y localicen el error, en caso de haberlo.

Los intentos fallidos o los errores de los alumnos forman parte de su proceso de aprendizaje y deben aprovecharse para que, a partir de ellos, avancen en sus conocimientos.

No todos los errores de los alumnos son importantes como fuente de aprendizaje, algunos se deben simplemente a un descuido al momento de operar o escribir. Este tipo de errores solamente se corrige en el momento oportuno, no tiene sentido discutirlo durante la confrontación.

Las secuencias didácticas y la formalización del conocimiento

Cuando se plantea un problema a los estudiantes generalmente lo resuelven con sus propios procedimientos, lo que implica procesos de búsqueda, diversos ensayos y posiblemente algunos errores. Por lo general, al principio no usan los procedimientos convencionales, sino sus propias estrategias a partir de los recursos que ya poseen.

Para que los alumnos aprendan los procedimientos convencionales de resolución a partir de las estrategias empleadas por ellos, es necesario proponer una secuencia didáctica, es decir, una serie de problemas que aumenten gradualmente el grado de complejidad de tal manera que exijan el uso de procedimientos cada vez más eficaces; en ocasiones esto se logra aumentando el rango de los números, imponiendo alguna condición o restricción, o cambiando la estructura del problema.

Una misma situación, con algunas variaciones, será interesante para los estudiantes mientras no encuentren una forma sistemática de resolver los problemas que de ella se plantean.

En algunas ocasiones los estudiantes no llegarán por sí mismos al procedimiento convencional, pero estarán muy cerca como para que puedan vincularlo con sus propios recursos y no les resulte ajeno, en estos casos el profesor puede proponerlo como una forma eficaz para encontrar la solución.

Los procedimientos formales de resolución serán comprendidos y adoptados por los estudiantes cuando les faciliten la realización de tareas complejas y les resuelvan necesidades; de esta manera comprenderán que los procedimientos formales son herramientas flexibles y adaptables que les permiten resolver de una forma eficaz y más eficiente los mismos problemas que resolvían con procedimientos más largos, y en ocasiones más complejos.

Es probable que después de haberles presentado un determinado procedimiento formal algunos estudiantes continúen utilizando sus estrategias. Ante esta situación, es recomendable permitírselos por un tiempo y recordarles que también puede resolverse con el procedimiento convencional señalado. Poco a poco, en la medida que los estudiantes comprendan el procedimiento formal se apropiarán de él y lo utilizarán para resolver problemas.

Organización del trabajo en el aula

El trabajo en equipo

El profesor podrá organizar a los estudiantes en equipos para resolver problemas y discutir colectivamente sus conjeturas, estrategias de resolución y soluciones.

Trabajar en equipo es algo más que trabajar juntos (en el sentido de cercanía). No basta con agrupar a los alumnos en parejas o en pequeños grupos para suponer que se realizará un trabajo en equipo.

Más bien se trata de generar un ambiente de estudio en donde todos los integrantes del equipo asuman la responsabilidad de resolver juntos el problema planteado. De esta manera aprenden a relacionarse con sus compañeros, haciéndose responsables de sus propios argumentos, respetando el punto de vista de los demás, y mejor aún, ayudando a que todos entiendan y participen en el proceso de resolución del problema.

En ocasiones se puede pensar que trabajar en equipo implica perder tiempo en la organización de los estudiantes y en reacomodar el mobiliario, sin embargo, esta inversión de tiempo se compensa con beneficios significativos, en virtud de que un estudiante por sí sólo puede funcionar hasta cierto nivel, pero su potencial se incrementa al interactuar con sus compañeros. Además, poco a poco los estudiantes se acostumbrarán a esta forma de trabajar y requerirán de menos tiempo.

Cuando el profesor delega en los equipos la responsabilidad de resolver un problema, permite que hagan uso de sus conocimientos previos, elaboren conjeturas, las comuniquen a sus compañeros y las validen. Con esto adquieren cada vez mayor seguridad en sí mismos, ya que dejan de ser solamente receptores pasivos de las explicaciones del profesor.

Por otro lado, trabajar en equipo permite a los estudiantes encontrar más de una estrategia para resolver un mismo problema. Estas estrategias constituyen una gran riqueza didáctica porque favorecen la comprensión más profunda de los hechos, conceptos o principios involucrados, al socializarlas y buscar argumentos para defenderlas o validarlas. Al mismo tiempo, los estudiantes se apropian del vocabulario y medios de expresión matemáticos con el propósito bien definido de comunicar a los demás la manera en que resolvieron el problema.

La forma en la que la persona interactúa en equipo dice mucho del ambiente familiar en el que se desenvuelve, y es una buena oportunidad para formar al ciudadano, responsable de las tareas comunitarias y respetuoso de las ideas de los otros.

Trabajar en equipo ofrece al profesor la posibilidad de acercarse más a los estudiantes para conocer el grado de avance que va logrando cada uno de ellos, al observar la calidad de sus intervenciones y la manera en que utilizan los recursos matemáticos para resolver el problema planteado.

Aunque trabajar en equipo es un recurso valioso en la clase de matemáticas, esto no significa que deban excluirse las actividades individuales o el trabajo colectivo dirigido por el profesor.

Con base en el tema que se esté estudiando y en función del problema por resolver, el profesor decidirá la pertinencia de trabajar en equipos y el número de integrantes que los conformarán.

El tiempo para resolver un problema

La resolución de problemas en el salón de clases requiere tiempo. Por ello, el profesor preverá la duración suficiente para que la actividad se desarrolle completamente, desde el tiempo que requiere el planteamiento del problema, la exploración de la situación por parte de los estudiantes, la discusión de las primeras conjeturas, la validación, hasta la formulación de conclusiones que se desprenden del trabajo realizado.

Una de las preocupaciones de los profesores es la necesidad de cubrir todos los temas del programa. Ante esta situación, muchos profesores optan por *dar la clase* porque de esa manera garantizan una fecha y hora para cada tema del programa. Sin embargo, con esta forma de proceder, el aprendizaje de los alumnos es mínimo y en términos reales se pierden mucho más, no sólo el tiempo, porque periódicamente hay que repetir las mismas explicaciones, también se pierden el interés por el estudio, la creatividad, la iniciativa y, en general, la posibilidad de superar los obstáculos que presenta la vida.

En la medida que los profesores logren que las sesiones de clase de matemáticas sean un espacio para la reflexión, para comunicar y escuchar opiniones, para enfrentar diversos retos y superarlos, los estudiantes contarán cada vez con más recursos para resolver los problemas que se les plantean, requerirán menos tiempo y se avanzará más, a paso firme.

Para optimizar el uso del tiempo en clase conviene, entre otras cosas, que el profesor no la utilice para calificar las tareas de los alumnos, así como para realizar otras actividades que son ajenas al estudio de las matemáticas y, por tanto, deberán llevarse a cabo en otros momentos.

Las tareas del profesor

La participación del profesor es fundamental en esta propuesta didáctica. La actividad central del profesor de matemáticas comprende los siguientes aspectos:

- Le corresponde seleccionar y en su caso adecuar los problemas y actividades que propondrá a los alumnos.
- Plantea los problemas.
- Organiza y coordina el trabajo en el aula.
- Propone nuevos problemas o contraejemplos, es decir, problemas que contradigan las hipótesis de los estudiantes, favoreciendo la reflexión y la búsqueda de nuevas explicaciones o procedimientos que los aproximen hacia la formalización de los conocimientos matemáticos.
- Contribuye a aclarar confusiones.
- Promueve y coordina la discusión sobre las ideas que tienen los estudiantes acerca de las situaciones que se plantean, mediante preguntas que les permitan conocer el porqué de sus respuestas.
- Participa como fuente de información y para vincular los conceptos y procedimientos propios de los estudiantes con el lenguaje convencional y formal.

El profesor debe considerar que su papel no se limita a coordinar la actividad de los estudiantes. Respetando la actividad y creatividad de éstos debe intervenir con sus orientaciones, explicaciones y ejemplos ilustrativos cuando así lo requiera el avance del grupo. Éste es uno de los momentos más difíciles de su quehacer docente, pues, con base en su experiencia, debe intervenir en el momento oportuno de tal manera que no sustituya el trabajo de los alumnos.

Selección de las actividades

El profesor, elige y organiza las actividades para cada sesión y el curso en general en la forma que considere más conveniente para propiciar el aprendizaje de los estudiantes. Para ello podrá apoyarse en su propia experiencia, en las sugerencias aquí contenidas, en la *Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación secundaria,* en el *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria,* en los videos, en los libros de texto, etcétera.

Es conveniente que el profesor al seleccionar las actividades y problemas para la clase considere las otras asignaturas que se imparten en la educación secundaria, como Física, Química, Biología y las diversas ciencias sociales. Estas materias requieren del apoyo de las matemáticas y al mismo tiempo son una fuente rica de problemas y actividades que servirán al profesor para mostrar a los alumnos las aplicaciones de las matemáticas y sus relaciones con otras disciplinas.

Es fundamental que antes de proponer un problema a los estudiantes, el profesor busque distintas maneras de resolverlo, de esta manera podrá anticipar los posibles procedimientos de los estudiantes. Esto le dará también la posibilidad de prever algunos errores y reflexionar acerca de qué preguntas hacer o qué situación plantear para ayudar a sus alumnos durante la clase.

Organización de la clase

Es recomendable que el profesor elabore un plan de clase, el que contendrá solamente información útil y necesaria, a la cual pueda recurrir durante el desarrollo de la sesión.
A continuación se muestra un esquema de un plan de clase.

Plan de clase
Nombre de la escuela: Fecha:
Nombre del profesor:
Propósito:
Actividad:
Observaciones:

El plan de clase debe contener el registro preciso de las situaciones problemáticas que se plantearán. Cuando se trata de un problema tomado de este libro o del fichero de actividades didácticas, bastará con anotar la referencia o lo que el profesor considere necesario para llevarla a cabo, pero cuando no se trate de un problema seleccionado de los materiales de apoyo, es necesario anotarlo con el fin de enriquecer el repertorio de actividades y tener presente cómo funcionaron al ser presentados a los alumnos. En ciertos casos conviene registrar textualmente las indicaciones o consignas que el profesor dará a los alumnos para evitar imprecisiones o términos que confundan o agregar palabras que orienten la resolución.

En Propósito se incluyen los recursos que se espera que utilicen los alumnos para resolver los problemas.

En el rubro Observaciones el profesor describe brevemente, después de la clase, qué tan interesante resultó la actividad o problema que propuso y por qué, con lo cual se tiene una evaluación del mismo y la posibilidad de mejorarlo.

Organización del curso

Durante todo el ciclo escolar deben usarse y practicarse constantemente:

- Los procedimientos de cálculo, incluido el cálculo mental y la estimación de resultados.
- La iniciación gradual al razonamiento deductivo.

- Los trazos y construcciones geométricas, al principio utilizando todos los instrumentos de dibujo y medida y, más adelante, con la restricción en algunos casos de sólo utilizar regla sin graduar y compás.
- El uso de los diferentes medios de expresión matemática en la resolución de problemas: lenguaje simbólico, tablas y representaciones gráficas.
- El uso de la calculadora como recurso didáctico en la resolución de problemas.

En muchos cursos de matemáticas, el estudio de ciertos temas importantes es breve, de tal manera que los estudiantes no tienen más adelante la oportunidad de revisarlos y enriquecerlos, y se ven obligados a asimilar mucha información en poco tiempo. Las investigaciones en educación matemática muestran, por el contrario, que la apropiación de las nociones y procedimientos matemáticos es un proceso gradual, en el que los nuevos conocimientos se vinculan estrechamente con lo que ya se sabe, de manera que estos saberes se fortalecen, se amplían o se sustituyen. Por ejemplo, el conocimiento de los números negativos amplía las posibilidades de la sustracción, en el caso en que el minuendo es menor que el sustraendo; el conocimiento de las ecuaciones fortalece el cálculo aritmético y la multiplicación con fracciones sustituye la idea de que el producto siempre es mayor que cualquiera de los factores.

Entonces, es importante que en la planeación del curso de matemáticas el profesor ofrezca a los estudiantes la oportunidad de estar en contacto frecuente con las nociones y procedimientos básicos, en situaciones que les permitan utilizar los conocimientos anteriores, a medida que progresa gradualmente hacia conocimientos más avanzados. El profesor dispone de una buena propuesta para organizar su curso en la *Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación secundaria.*

Cuando sea necesario revisar algún tema, en lugar de repetir mecánicamente explicaciones y actividades conocidas por los estudiantes, será preferible recordar brevemente las nociones principales y proponer problemas que las enriquezcan.

En los materiales de apoyo, el profesor dispone de una buena cantidad de problemas que pueden dar lugar a actividades interesantes para los estudiantes, al mismo tiempo que favorecen la comprensión de las nociones básicas y la práctica de los procedimientos.

El trabajo colegiado

Dado que no todos los profesores de matemáticas imparten el curso en los tres grados escolares, es necesario asumir la responsabilidad de la educación de los estudiantes como un trabajo colegiado.

El trabajo del profesor de cada uno de los tres grados repercute en el proceso global de formación de los alumnos.

En ocasiones la falta de comunicación entre profesores ocasiona que se planteen situaciones repetidas a los mismos alumnos en grados distintos, lo cual puede mermar el interés de ellos por el estudio de las matemáticas; por otra parte, conviene llevar un control y seguimiento del grado de dificultad de los problemas que se estudian a lo largo de la educación secundaria.

La evaluación

Significado de la evaluación

La evaluación es uno de los aspectos más complejos, tanto por la naturaleza misma del proceso de evaluación, como por sus implicaciones en el proceso de estudio y para los estudiantes.

Tradicionalmente las matemáticas han sido una asignatura con un alto grado de reprobación en todos los niveles educativos, esto ha dado como resultado que muchos estudiantes trunquen sus estudios o pasen por un periodo de frustración en algún momento de su vida escolar. Esta situación hace necesaria la reflexión acerca del sentido y los propósitos de la evaluación y qué es lo que el profesor debe realmente evaluar en sus alumnos.

El término *evaluación* es reciente en la educación. Se introdujo, entre otros propósitos para destacar el hecho de que, con frecuencia, la información que proporcionan los exámenes es insuficiente para conocer los resultados del aprendizaje y tomar decisiones adecuadas sobre los procesos de enseñanza. Desafortunadamente, el término se volvió sinónimo de calificación y examen, tanto para alumnos como para el profesor, y ha provocado la actitud poco conveniente de estudiar para acreditar un examen.

El proceso de evaluación continua

La evaluación es un proceso continuo que se desarrolla a lo largo de todo el ciclo escolar. Su objetivo es recoger información que le sea útil al profesor para mejorar el desempeño de los alumnos y ajustar las actividades de estudio a las necesidades de aprendizaje de los mismos, así como para tratar de mejorar la práctica docente del profesor. En este sentido, es importante que la evaluación no consista únicamente en la aplicación de uno o varios exámenes localizados en momentos fijos del curso, sino que el profesor observe constantemente el desarrollo de las actividades en clase y la participación de los estudiantes en ellas. La información recabada permitirá mejorar, a tiempo, todos los factores que intervienen en el proceso didáctico.

Coherencia de la evaluación con los propósitos y el enfoque didáctico

Es común que los profesores de matemáticas argumenten que el estudio de esta asignatura es de gran utilidad para los alumnos, porque les proporciona elementos para resolver problemas de la vida cotidiana y desarrolla sus habilidades para pensar y razonar lógicamente. Esta postura resulta contradictoria si la evaluación del aprendizaje se limita a la aplicación de exámenes cada cierto periodo de tiempo que muchas veces sólo miden conocimientos aislados y no dan cuenta del proceso de desarrollo de habilidades y, sobre todo, las dificultades que obstaculizan dicho desarrollo.

Tanto el proceso como las formas de evaluación deben ser coherentes con los contenidos, propósitos y enfoque señalados en el *Plan y programas de estudio. Educación básica. Secundaria,* por ello es necesario que al diseñar su proceso de evaluación, el profesor contemple actividades que le permitan recoger información de fuentes muy diversas, como pueden ser los exámenes escritos, los registros de observación en clase, los ensayos y exposiciones, pequeños cuestionarios respecto a tal o cual punto del programa, etcétera.

Es poco congruente que mientras el proceso de estudio tiene entre sus propósitos, promover actitudes, fomentar el trabajo en grupo y desarrollar la habilidad de los alumnos para producir, comunicar y validar conjeturas —o bien busca desarrollar habilidades para comprender, interpretar y valorar ideas matemáticas presentadas en diversas formas—, la evaluación se reduzca a exámenes escritos de aplicación individual, que si bien ayudan a evaluar algunos desempeños, no permiten observar aspectos como los anteriores.

Exámenes escritos individuales

Para obtener información sobre determinados aprendizajes, algunas veces es útil recurrir a la aplicación de exámenes escritos individuales. A continuación se dan algunas sugerencias generales sobre la elaboración de este tipo de exámenes:

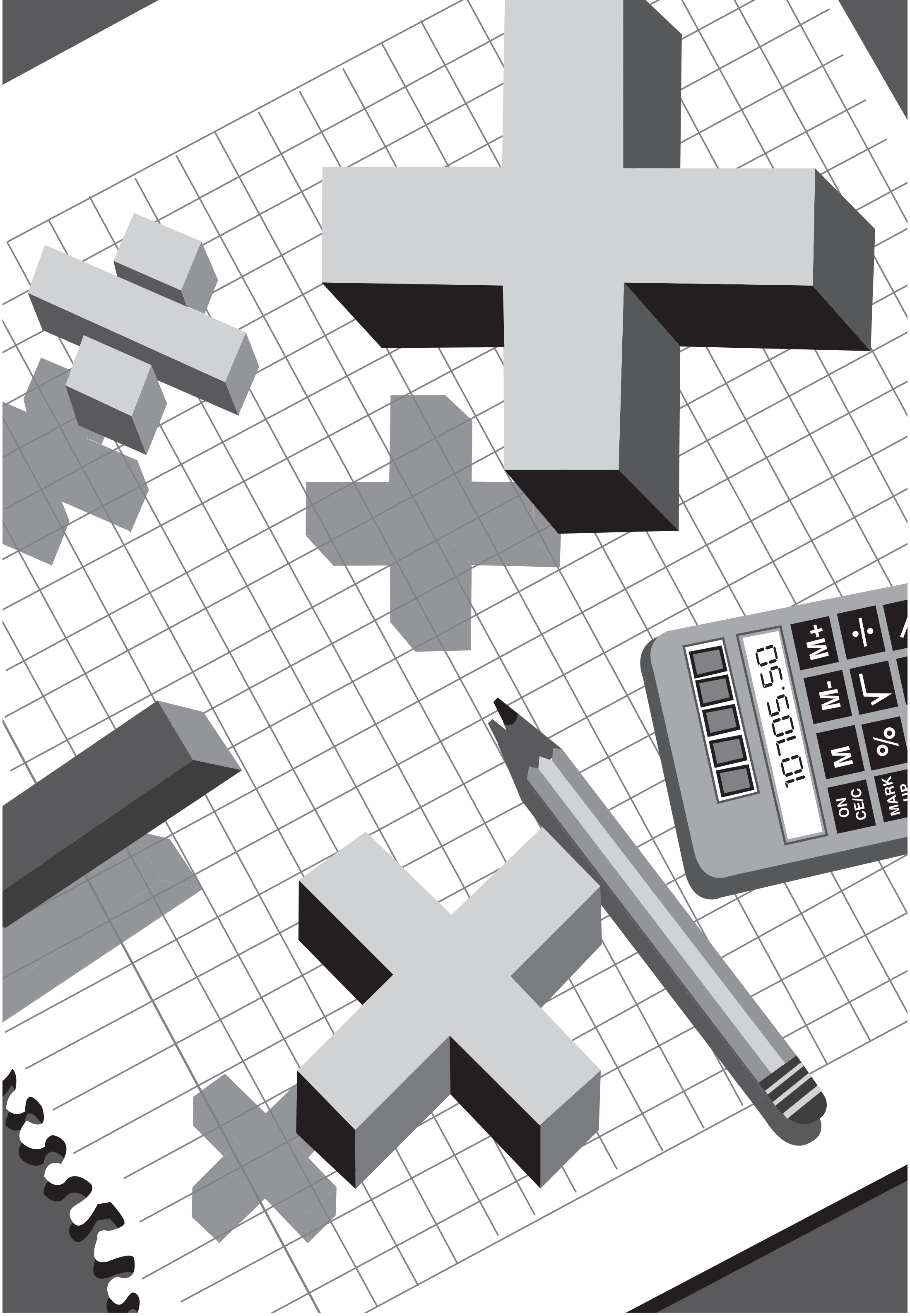
- Los exámenes escritos deberán elaborarse a partir de los conocimientos comunes exigibles a todos los estudiantes, procurando no darle un peso exagerado a las definiciones y los significados de ciertos vocablos. En lugar de proponer muchas preguntas, es preferible distinguir lo esencial de lo accesorio o menos importante y elaborar cuestionarios más breves.
- Tampoco conviene evaluar temas importantes en un solo examen. Es preferible que un mismo tema aparezca en varios exámenes, pues así el profesor observará cómo progresa su adquisición durante el año.
- Cuando el profesor lo considere conveniente permitirá el uso de las calculadoras en los exámenes.

Finalmente, es recomendable no abusar de las preguntas de opción múltiple u otras similares. Aunque este tipo de preguntas pueden ser útiles en ocasiones y facilitar la calificación de los exámenes, su uso irreflexivo en los últimos años ha contribuido a empobrecer la enseñanza. Su inconveniente más grave es, quizá, que ocultan información valiosa para el profesor.

Al calificar un examen se debe tener en cuenta que no se trata solamente de contar el número de aciertos para asignar una calificación, sino de valorar las respuestas, es decir, revisarlas con cuidado para enterarse de los diferentes tipos de respuestas correctas que aparecen, así como de los errores más comunes. Este análisis servirá también para evaluar si las preguntas fueron las adecuadas. En particular, un análisis cuidadoso de los errores más frecuentes permitirá al profesor detectar dónde se encuentran las dificultades y diseñar actividades que ayuden a resolverlas.

La información obtenida en el proceso de evaluación deberá revertirse permanentemente a los estudiantes no sólo como una calificación, sino con la intención de que sean conscientes de sus propios aprendizajes, de sus logros y limitaciones. Junto con esto, es necesario que los estudiantes reciban las sugerencias necesarias para mejorar su aprendizaje.

Es importante que la calificación de los estudiantes no dependa solamente del resultado de uno o varios exámenes por escrito. Por el contrario, deberán tomarse en cuenta sus participaciones en clase y las informaciones recogidas por medio de otras fuentes diseñadas con este propósito.



Aritmética

- La aritmética en la educación secundaria
- Aritmética con naturales y decimales
- Aritmética entera
- Las fracciones
- Razonamiento proporcional
- Los números con signo
- Métodos aproximados y cálculo de la raíz cuadrada

Aritmética

La aritmética en la educación secundaria

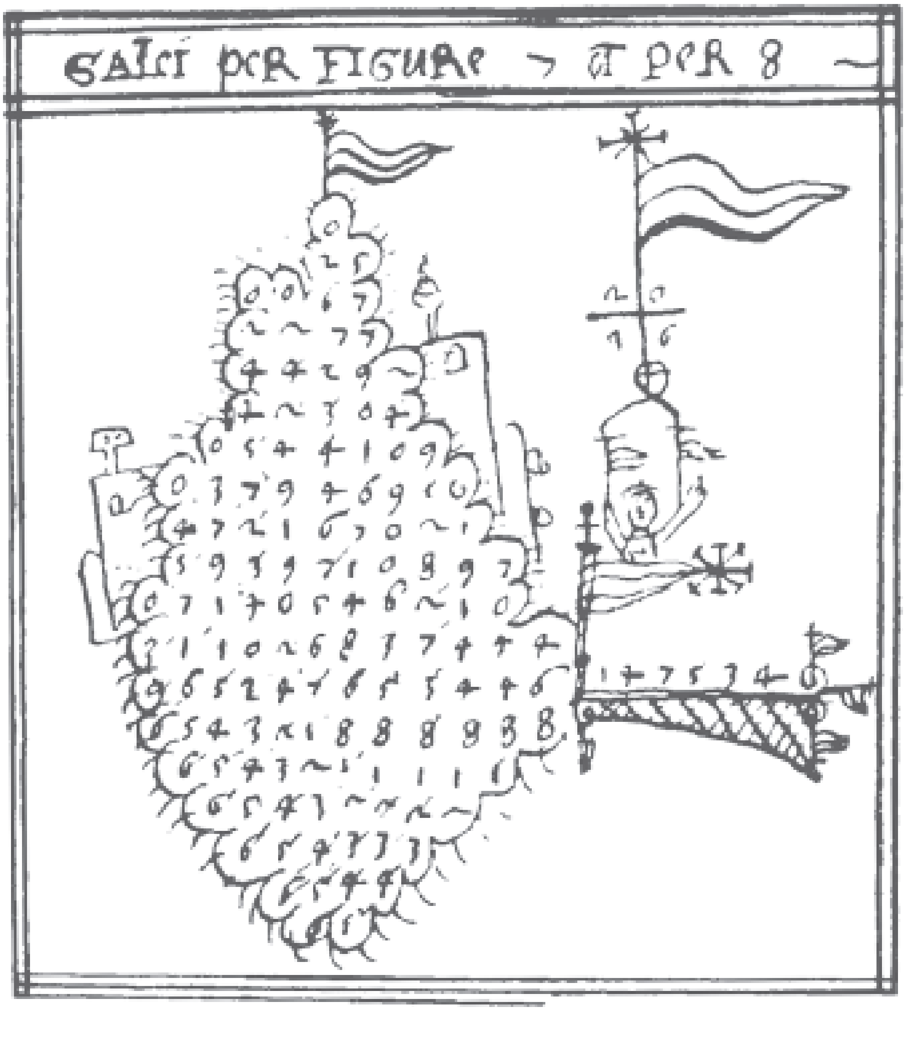
Es costumbre distinguir la aritmética elemental de la teoría de números o aritmética superior. La aritmética elemental trata de los significados y formas de operar con los enteros naturales, los decimales y las fracciones, así como de sus aplicaciones en la resolución de problemas. La aritmética superior, por su parte, estudia las propiedades de la sucesión de los números naturales 0, 1, 2, 3, ... y constituye una de las partes más puras y al mismo tiempo difíciles de las matemáticas. Salvo por algunos temas elementales, relacionados con la búsqueda de múltiplos y divisores y la factorización en primos de un número, la teoría de números no se enseña en el nivel básico de la educación, donde se estudia sobre todo la aritmética elemental.

Estamos tan familiarizados con la aritmética elemental —y la aprendimos hace tanto tiempo— que con frecuencia olvidamos las dificultades que encierra su aprendizaje y el papel que juega en la comprensión de otras partes de las matemáticas. Las nociones y procedimientos de la aritmética constituyen la base intuitiva del álgebra y de casi todas las matemáticas que se enseñan en la escuela, desde los grados elementales hasta la universidad y niveles más adelantados. Asimismo, la aritmética provee a los alumnos de los esquemas básicos de tratamiento de situaciones y resolución de problemas necesarios para elaborar y comprender procedimientos más avanzados.

Un reflejo de lo anterior es la gran cantidad de problemas de álgebra, de cálculo y de otras partes avanzadas de las matemáticas que pueden resolverse por métodos numéricos. De hecho, hay muchos problemas que sólo pueden resolverse de esta forma. Sin embargo, estos problemas casi nunca se utilizan en la enseñanza elemental, a pesar de que pueden servir para practicar los procedimientos aritméticos en situaciones interesantes, al mismo tiempo que enriquecen la experiencia numérica de los alumnos y los ayudan a desarrollar nociones importantes.

Un buen conocimiento de la aritmética es tan fundamental como saber leer y escribir y no puede reducirse a los algoritmos para realizar las cuatro operaciones fundamentales. Muchos de los fenómenos que nos afectan se han vuelto tan complejos que no podemos percibirlos directamente o tratarlos de manera puramente cualitativa, sino que requieren técnicas cuantitativas de recolección y tratamiento de información. Es probable que para las necesidades comunes no sea necesario conocer en detalle estas técnicas, pero sí se requiere estar acostumbrado a las nociones aritméticas que subyacen a ellas. Sin embargo, muchas personas tienen dificultades para construir referentes que les permitan apreciar la magnitud de ciertas cifras, sobre todo si vienen dadas por números muy grandes o pequeños, o en forma de tasas y porcentajes. Asimismo, son incapaces de utilizar las nociones básicas de aritmética, estadística y probabilidad aprendidas en la educación básica para llevar las cifras que se les presentan a un rango comprensible, para resolver problemas del mundo real y para juzgar la validez de ciertas afirmaciones. Este fenómeno es la contraparte matemática de lo que, respecto a la lectura y escritura de la lengua, se conoce con el nombre de analfabetismo funcional. No podemos, por lo tanto, considerar que se debe en su totalidad a dificultades inherentes a las matemáticas; más bien se origina en la falta de atención que la escuela le concede.

Al organizar su curso de matemáticas, conviene que el profesor tenga en cuenta que los alumnos no transfieren con facilidad los conocimientos aprendidos en la escuela a otros contextos; que el rango de los números que ellos manejan cotidianamente no les facilita la comprensión de números muy grandes y otras cifras que se manejan en los medios de comunicación; y que las consecuencias de ciertos hechos o



El método del galeón. La reproducción corresponde al manuscrito de un monje veneciano del siglo XVI y muestra una forma de dividir que posiblemente se originó en la India y que después los árabes llevaron a Europa. Los sustraendos se escriben en la parte inferior y los residuos sucesivos en la parte superior. Para facilitar la comprensión del método, en el siguiente ejemplo se ha modificado la organización original de los cálculos:

	37	
	2 032	
285	4 882	17
	2 85	
	1 995	

informaciones expresadas en términos de tasas, porcentajes y otras formas numéricas de presentar la información no les resultan tan inmediatas y comprensibles como lo es, por ejemplo, el equivocarse al hacer la cuenta en la tienda. Aunque en los últimos años las nuevas tecnologías y la popularización de las calculadoras electrónicas han facilitado nuestras formas de calcular, ahora más que nunca las personas deben procesar una gran cantidad de información que les llega expresada en términos numéricos. En este momento, saber aritmética es, como ya se dijo, mucho más que poder realizar las cuatro operaciones fundamentales y aplicarlas en la resolución de problemas de mercado.

El estudio de la aritmética debe servir para que los alumnos desarrollen su sentido numérico. Es necesario que conozcan los significados de los números, se acostumbren a sus diferentes representaciones y exploren sus relaciones. También necesitan desarrollar sus habilidades para estimar magnitudes y, por medio de situaciones muy diversas, construir referentes que les permitan apreciar el tamaño de ciertas cifras de acuerdo con el contexto y utilizar con propiedad términos como: pequeño y grande, pocos y muchos, raro y frecuente, etcétera. La comprensión del significado de las operaciones facilitará el aprendizaje de los algoritmos y sus aplicaciones en la vida cotidiana y en la resolución de problemas. El desarrollo de sus habilidades para el cálculo mental y la estimación de resultados reforzará el aprendizaje de los hechos básicos, les permitirá controlar y eventualmente corregir el resultado de sus cálculos y utilizar adecuadamente la calculadora.

Es conveniente, asimismo, que exploren lo que ocurre al modificar los números que intervienen en un cálculo o los datos de un problema, o los efectos de repetir y combinar de maneras distintas varias operaciones.

Los alumnos deben comprender poco a poco los principios que hacen de las matemáticas, y de la aritmética en particular, un cuerpo coherente de conocimientos y no quedarse con la impresión de que se trata de una serie de hechos y procedimientos aislados y sin ninguna conexión entre sí. Esto no significa, sin embargo, que se vean obligados a aprender de memoria todas las propiedades de los números y a utilizar un lenguaje y un simbolismo que no están de acuerdo con su grado de madurez matemática, ni con los propósitos de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria.

En particular, debe haber actividades y problemas para que se reconozca el carácter inverso de las operaciones de sustracción y adición, así como de la multiplición y la división; se comprenda los significados de las fracciones y los números con signo; y las operaciones con números negativos sean vistas como una extensión de las operaciones entre números positivos.

Finalmente, con objeto de favorecer tanto la comprensión como la adquisición permanente de las nociones y procedimientos aritméticos, los alumnos deben tener a lo largo de toda la educación secundaria numerosas oportunidades de movilizar y poner en práctica los conocimientos aprendidos con anterioridad, en situaciones que los enriquezcan y conduzcan a la adquisición de nuevos conocimientos.

Para lograr los propósitos descritos en los párrafos anteriores, el programa recomienda poner atención en los siguientes aspectos de la enseñanza de la aritmética:

- La adquisición de las nociones y procedimientos aritméticos por medio de la resolución de problemas diversos.

- El uso inteligente de la calculadora de bolsillo como un auxiliar en la resolución de problemas.

- El cálculo y estimación mental de resultados como una forma de explorar las relaciones entre los números y controlar los resultados obtenidos con papel y lápiz o con la calculadora.

- El conocimiento del significado de los números y sus operaciones: enteros naturales, decimales y fracciones. La práctica de los algoritmos y su aplicación en la resolución de problemas.

- La resolución de diversos problemas de conteo que propicien el uso de diagramas de árbol, arreglos rectangulares, tablas y otros tipos de representaciones.

- La exploración de la estructura multiplicativa de los números en situaciones que conduzcan a la búsqueda de múltiplos y divisores, del m.c.d. y m.c.m. de dos o más números, a la factorización de números, etcétera.

- El desarrollo del razonamiento proporcional y el conocimiento de sus aplicaciones.

- Las actividades y problemas para que los alumnos conozcan y se acostumbren gradualmente a los números con signo y sus operaciones.

Aritmética con naturales y decimales

Operaciones con naturales y decimales

Los alumnos llegan a la secundaria con una gran cantidad de conocimientos aritméticos adquiridos en la primaria y pueden resolver muchos problemas, pero hay nociones que todavía no han comprendido y con frecuencia son poco diestros en sus cálculos. La operación que mejor conocen y saben aplicar es la adición, comprenden menos la sustracción, sobre todo si hay decimales de por medio, y tienen bastantes dificultades con la multiplicación y la división. Conviene que el profesor explore los conocimientos adquiridos por sus alumnos en grados anteriores y los tenga en cuenta al organizar su curso. Muchas veces no habrá necesidad de entretenerse repitiendo largas explicaciones que los alumnos habrán escuchado varias veces antes, sino que será preferible recordar brevemente las ideas principales y proponer actividades que permitan ponerlas en práctica y corregir las deficiencias observadas.

Por ejemplo, problemas como los siguientes podrán servir para revisar la lectura, la escritura, el orden y la comparación de enteros naturales.

1. Completa la tabla.

SE ESCRIBE	SE LEE
489	
	Doscientos diecisiete
301	
1 012	
	Siete mil quince
700 699	
3 225 140	
	Ocho millones dos mil
	Setecientos veintitrés millones doscientos catorce mil ciento cuarenta
23 321 089 510	

2. Con las siguientes placas se ha escrito "con todas sus letras" el número 1 310:

mil	tres	ciento(s)	diez

a) Encuentra todos los números que pueden escribirse combinando de diferentes formas las cuatro placas anteriores. Ordénalos de menor a mayor.

b) Si se dispone además de otra placa con la palabra siete, ¿cuáles son todos los números que pueden escribirse utilizando las cinco placas?

3. Enseguida se dan, sin ningún orden, los 10 ríos de mayor longitud del continente americano. Ordénalos según su longitud y busca en un libro de geografía su ubicación para que llenes la tabla que viene a continuación.

Mackenzie (4241 km), Tocantins (2639), Yukón (3185 km), Mississipi-Missouri (5971 km), Madeira (3240 km), Bravo o Grande (3034 km), Paraná-La Plata (4023 km), Amazonas (6437 km), San Francisco (3199 km), Purus (3380 km).

	Río	País(es)	Longitud (km)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

4. Escribe todos los números mayores que 5000 que pueden obtenerse permutando (intercambiando) las cifras del número 4507. Ordénalos de menor a mayor. □

La multiplicación y la división

Los alumnos necesitan comprender y acostumbrarse a los significados de los números y sus operaciones por medio de actividades muy diversas. En particular, conviene que se planteen problemas que enriquezcan los significados de la multiplicación y la división (exacta, con residuo y aproximada).

Por ejemplo

1. Completa el cuadrado de la derecha de manera que sea mágico (un cuadrado es mágico si al sumar los números en las hileras, las columnas y las diagonales se obtiene siempre el mismo resultado).

16		2	13
5	10		8
9			
4	15		1

2. El señor López compró tres revistas de \$22, \$37 y \$55, respectivamente, una calculadora de \$120 y un cuaderno de \$17 y pagó con dos billetes de \$200. ¿Cuánto le devolvieron de cambio?

3. Juanita se compró blusas y faldas. Si las blusas le costaron \$135 y las faldas \$50 y gastó en total \$205, ¿cuántas blusas y faldas compró?

4. ¿De cuántas maneras distintas se puede completar \$1 utilizando moneda fraccionaria? (Hay monedas de 5¢, 10¢, 20¢ y 50¢.)

5. A una excursión asistieron 12 personas entre niños y adultos. Si los adultos pagaron \$10 y los niños \$5 y se juntaron en total \$85, ¿cuántos niños y cuántos adultos asistieron a la excursión?

6. Un tren de pasajeros se compone de 12 vagones. Cada vagón tiene seis compartimientos y cada compartimiento tiene seis lugares para viajar sentado. ¿Cuántos pasajeros pueden viajar sentados en el tren?

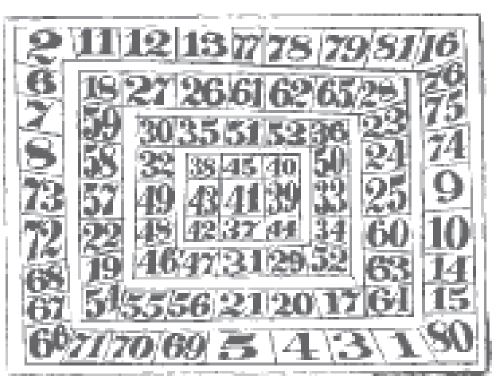
7. Suponiendo que en un día hay 24 horas, en un mes 30 días y en un año 365 días, lo que no es completamente exacto, ¿cuántos segundos hay en un día? ¿En una semana? ¿En un mes? ¿En un año?

8. En un restaurante, un parroquiano puede escoger entre dos sopas, cuatro guisados y tres postres. ¿De cuántas formas diferentes puede componer su menú? Si se quisiera aumentar el número de combinaciones posibles agregando un platillo, ¿qué convendría aumentar: el número de sopas, el de guisados o el de postres?

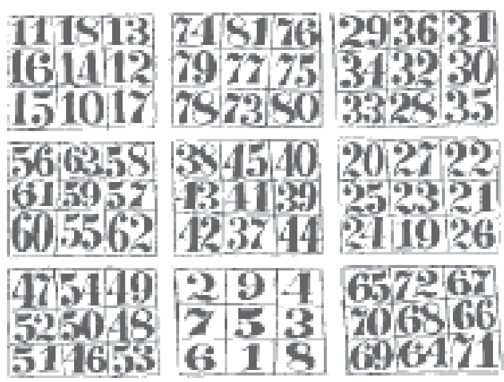
9. Se va a cercar un terreno rectangular que mide 25 m por 40 m. Si cada metro lineal de barda cuesta \$115, ¿cuánto costará cercar todo el terreno?

10. Se quiere desmontar una parcela que mide 250 m por 600 m. Si toma 5 días desmontar cada hectárea, ¿cuánto tomará desmontar toda la parcela?

11. Se va a tender una línea eléctrica de 35.750 km de longitud con postes separados entre sí por una distancia de 125 m. Si el primer poste se coloca al inicio de la línea, ¿cuántos postes serán necesarios en total?



Este cuadrado es mágico en su totalidad, y cada cuadrado que resulta quitando un borde de él también es mágico.



Cuadro compuesto que es asimismo mágico en su conjunto. A la vez cada uno de los cuadrados parciales es mágico.

12. A una excursión irán 165 personas. Si en cada camión caben 36 personas y su alquiler cuesta $900, ¿cuántos camiones se necesitan y con cuánto deberá cooperar cada persona?

13. La distancia de la Tierra a la Luna es de alrededor de 353 000 km y la de la Tierra al Sol es de 150 000 000 km aproximadamente. El radio de la Tierra es de 6 379 km y el del Sol es de aproximadamente 696 000 km.

a) ¿Cuántas veces es mayor la distancia de la Tierra al Sol que de la Tierra a la Luna?
b) ¿Cuántas veces es mayor el diámetro del Sol que el de la Tierra? ¿Cuántas veces se podría intercalar la Tierra entre la Tierra y la Luna?
d) ¿Y entre la Tierra y el Sol?

14. Cuatro hermanos quieren comprar una enciclopedia que vale $950. Para hacerlo, cada uno ahorra lo mismo mensualmente y sus padres deciden ayudarlos con $75 cada mes. Si al cabo de cinco meses ya habían completado para pagar la enciclopedia y les sobraban $25, ¿cuánto ahorró cada hermano mensualmente?

15. Una caja contiene 24 paquetes de seis baterías cada uno y tiene un precio de $125 para el mayorista. Si un comerciante quiere ganar al menos $30 por caja, vendiendo por paquete, y el doble vendiendo sueltas las baterías, ¿cuál debe ser el precio de cada paquete y el de cada batería? □

Conviene explorar en clase los efectos que se presentan al modificar los números en un cálculo, o los datos de un problema, al repetir varias veces una misma operación o al combinar de maneras distintas varias operaciones.

Por ejemplo

1. Si esta semana ahorro un peso y la siguiente el doble, es decir, $2, y a la que sigue duplico otra vez lo que ahorro, es decir, ahorro $4, y si sigo así todas las semanas, ¿cuánto ahorraré en dos meses? ¿Cuánto tardaré en ahorrar $1000? ¿Y $10 000? ¿Con cuánto debo empezar si duplicando mi ahorro todas las semanas quiero acumular $1 000 en dos meses?
(4 semanas = 1 mes)

2. Considera los siguientes números.

72, 48, 6, 63,
12, 95, 35, 81

¿Cuál es el menor y cuál el mayor que puedo obtener sumando, restando, multiplicando y dividiendo dos números de la lista? ¿Cuál es el menor y cuál el mayor que puedo obtener si primero sumo dos números y luego multiplico por un tercero? ¿Y si primero multiplico dos y luego sumo un tercero? □

Situaciones de la vida cotidiana

La experiencia muestra que las personas no ponen en práctica —o lo hacen con dificultad— los conocimientos que adquieren en la escuela para enfrentar situaciones que se les presentan en el trabajo y la vida cotidiana. Por eso es importante que haya actividades y problemas que acostumbren a los alumnos a aplicar las nociones y procedimientos aritméticos en las situaciones más diversas.

Por ejemplo

1. Un televisor me cuesta $900 de contado, o bien puedo comprarlo a crédito dando un enganche de $300 y seis mensualidades de $145 cada una. ¿Cuál es la diferencia entre los precios de contado y a crédito?

2. Completa la siguiente nota de compra:

Papelería LA REGLA Y EL COMPÁS

Hidalgo 18, Angangueo, Mich. RFC RECO990101

NOTA DE REMISIÓN Núm. 2343

Nombre: ______________________

Fecha: ______________________

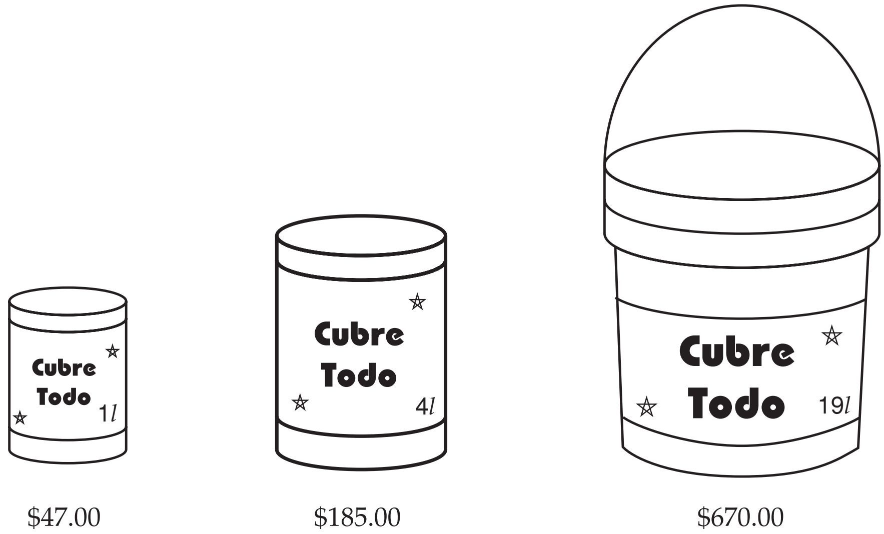
Dirección: ______________________

Colonia: ______________________

Cantidad	Descripción	Precio unitario	Precio
2	Plumones	7.70	
3	Cuadernos		38.55
	Lápices	2.10	12.60
2	Blocs de dibujo		31.60
	Folders	1.40	11.20
3	Carpetas		70.50

Total:	
10 % Dcto.	
Total	
+ 15 % IVA	
A pagar:	

3. La pintura *Cubretodo* se vende en tres presentaciones. ¿Cuál es el precio por litro para la lata de 4 *l* y la cubeta de 19 *l*?

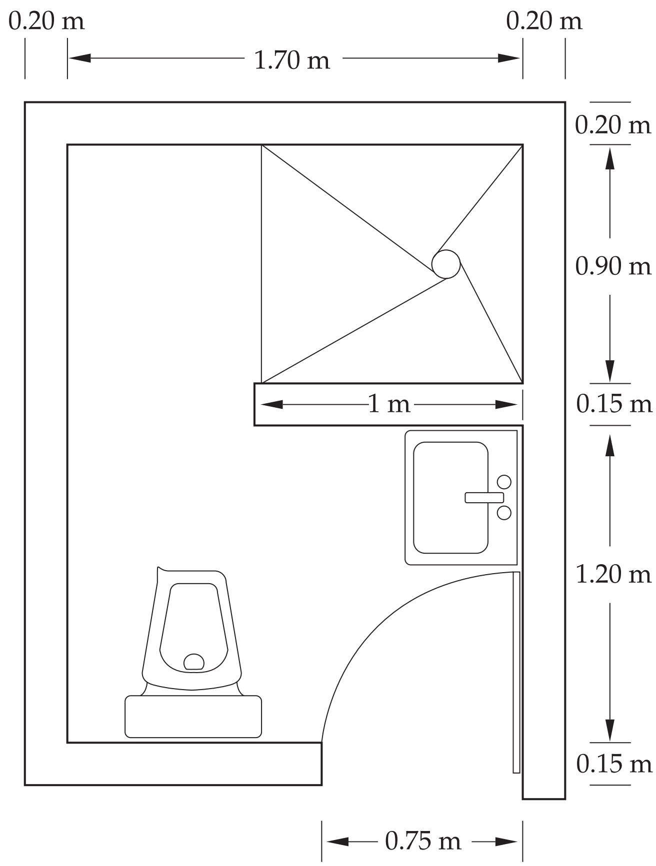


4. Investigar cuántas marcas y presentaciones de un mismo producto existen en el comercio (por ejemplo, de atún). Calcular y presentar en tablas el precio unitario, es decir, por kilogramo, por litro, etcétera (en casos como el del atún deberá considerarse el peso drenado y no el peso total).

5. ¿Cuánto ahorra al año una persona que deja de fumar, o una persona que consume refrescos en envase retornable en lugar de consumir refrescos en envase desechable?

6. ¿Cuánto emplea al año, en tiempo y dinero, una persona para trasladarse de su trabajo a su casa y viceversa? Analizar diferentes posibilidades y estimar el gasto en cada caso.

7. Presupuestar cuánto cuesta cubrir con mosaico y azulejo un baño como el del dibujo hasta una altura de 2 m. Tendrás que investigar el precio de la mano de obra, el mosaico, los azulejos y el pega azulejos y considerar un desperdicio de aproximadamente 5 o 10% del material.



8. Un grupo de cuatro personas viaja en automóvil a una ciudad situada a 690 km de distancia. Si además del gasto de gasolina y aceite se consideran los alimentos, ¿en cuánto les saldrá el viaje aproximadamente?

9. Un colocador cobra $630 por cubrir de mosaico un piso de 3.50 m por 3.75 m. ¿Cuánto cobra por metro cuadrado?

10. La última vez que llené el tanque de gasolina, mi coche había recorrido 47 286 km. Ahora que acabo de llenarlo, la bomba marcó 23 *l* y el cuentakilómetros 47 507 km recorridos. ¿Cuántos kilómetros por litro rinde mi coche? ¿Cuánto me cuesta en promedio recorrer un kilómetro? □

Los algoritmos de las operaciones básicas en la educación secundaria

Los algoritmos y procedimientos de cálculo están llenos de detalles donde los alumnos pueden perderse con facilidad. En lugar de intentar explicarlo todo desde un principio, se deberá procurar que se comprendan las nociones esenciales que subyacen en los procedimientos aritméticos, dejando para un poco después, o para la calculadora, los casos más complicados. Por otro lado, hay procedimientos que conviene que se practiquen, pues ayudan al cálculo mental y a la estimación de resultados. Estos son, entre otros, la práctica de la multiplicación y la división entre 10, 100, 1000, etcétera y la escritura de un natural terminado en ceros como el producto de un entero natural por 10, 100, 1000.

Por ejemplo

Si queremos estimar el producto:

$$875 \times 3\,125$$

Podemos pensar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 875 \times 3\,125 &\approx 900 \times 3\,000 \\ &= 9 \times 3 \times 100 \times 1\,000 \\ &= 2\,700\,000 \end{aligned}$$

Esto es, la estimación oscila alrededor de 2 700 000 (el valor exacto es 2 734 375). □

Problemas con números perdidos y operaciones donde algunos números han sido sustituidos por letras pueden ayudar a que los alumnos reflexionen sobre los algoritmos de las operaciones.

Por ejemplo

1. Encuentra los dígitos perdidos en las siguientes operaciones:

a)

$$\begin{array}{r} 2\,\square\,9 \\ +\,\square\,7\,2 \\ 8\,4\,\square \\ \hline 1\,7\,6\,8 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 4\,1\,\square \\ -\,1\,\square\,5 \\ \hline \square\,2\,3 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} \square\,1\,7 \\ \times\,\square\,5 \\ \hline \square\,0\,\square\,\square \\ \square\,\square\,1 \\ \hline \square\,\square\,\square\,\square \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r|l} & \;\;\square\,6\,\square \\ \cline{2-2} 28 & 7\,3\,\square\,\square \\ & \square\,7\,\square \\ & \;\;\square\,6\,5 \\ & \;\;\;\;\square\,\square \end{array}$$

2. En cada operación una letra representa siempre el mismo dígito, y letras diferentes representan dígitos diferentes. Encuentra los valores de las letras.

a)

$$\begin{array}{r} A\,B\,B \\ +\quad B\,A\,B \\ B\,B\,A \\ \hline C\,B\,B\,A \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} A\,A\,B \\ -\,C\,A \\ \hline A\,C \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} A\,B\,B \\ \times\quad C\,C \\ \hline \widehat{A}\,B\,B \\ A\,B\,B \\ \hline B\,A\,A\,B \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r|l} & A\,B\,B \\ \cline{2-2} AB & A\,C\,D\,D \\ & \;\;B\,D \\ & \;\;\;\;B\,D \\ & \;\;\;\;\;\;B \end{array}$$

Finalmente, comprender y adquirir seguridad y destreza en la ejecución de los algoritmos sigue siendo un objetivo importante, pero debe acompañarse de oportunidades para que los alumnos practiquen el cálculo mental y la estimación de resultados, al mismo tiempo que hacen uso de la calculadora electrónica. De esta manera desarrollarán una visión más completa de los procedimientos de cálculo y podrán utilizarlos con flexibilidad.

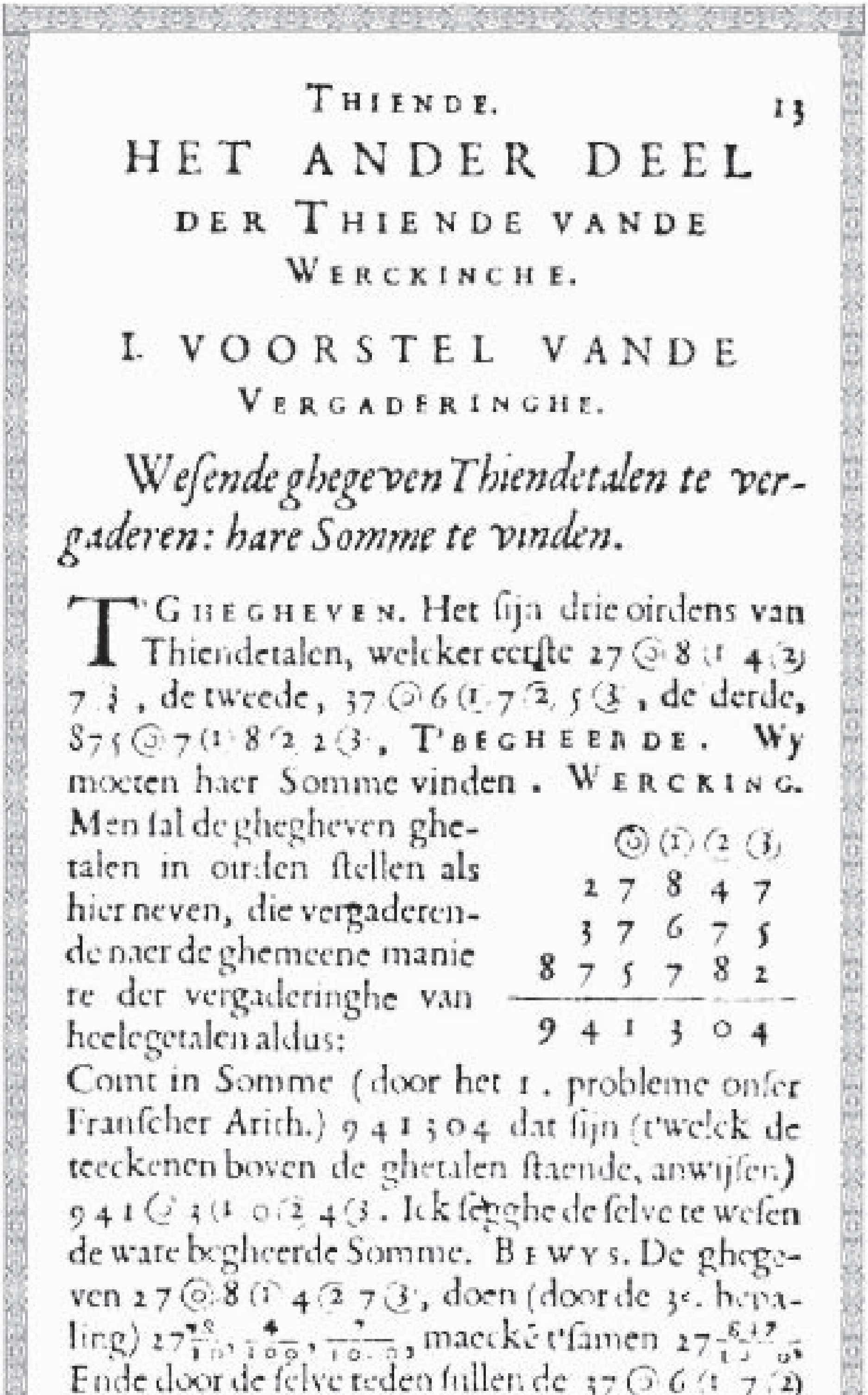
Algunas precisiones sobre los decimales

Aunque la escritura y las operaciones con decimales pueden verse como una extensión de lo aprendido para los números naturales, la presencia del punto decimal acarrea dificultades que tardan en vencerse. Es importante que los alumnos revisen los usos y significados de los números decimales en distintos contextos, al mismo tiempo que realizan actividades y resuelven problemas que los lleven a sumar, restar y comparar decimales. En particular, deben acostumbrarse a las diversas formas de escribir un número decimal: como una fracción decimal, como un entero natural más una fracción decimal, como un número "con punto decimal". Deberán, asimismo, aprender a encerrar un nú-mero decimal entre dos enteros naturales consecutivos, entre dos números decimales consecutivos con una sola cifra decimal, etcétera.

Por ejemplo

1. Completa la tabla.

El número	Su desarrollo	Se lee
3.25	$3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$ o $3 + \frac{25}{100}$	3 enteros, 2 décimos, 5 centésimos, o bien: 3 enteros, 25 centésimos
5.08		
17.345		
	$73 + \frac{1}{100} + \frac{5}{1\,000}$	
3.2355		
		16 enteros, 5 diezmilésimos
228.4000		
8.00035		
	$0 + \frac{1}{1\,000} + \frac{3}{10\,000}$	
		35 enteros, 4 855 cienmilésimos



THIENDE. 13

HET ANDER DEEL
DER THIENDE VANDE
WERCKINGHE.

I. VOORSTEL VANDE
VERGADERINGHE.

Wesende ghegeven Thiendetalen te vergaderen: hare Somme te vinden.

T'GHEGHEVEN. Het sijn drie oirdens van Thiendetalen, welcker eerste 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, de tweede, 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③, de derde, 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③, T'BEGHEERDE. Wy moeten haer Somme vinden. WERCKING. Men sal de ghegheven ghetalen in oirden stellen als hier neven, die vergaderende naer de ghemeene maniere der vergaderinghe van heelegetalen aldus:

⓪	①	②	③
27	8	4	7
37	6	7	5
875	7	8	2
941	3	0	4

Comt in Somme (door het 1. probleme onser Franscher Arith.) 941304 dat sijn (t'welck de teeckenen boven de ghetalen staende, anwijsen) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ick segghe de selve te wesen de ware begheerde Somme. BEWYS. De ghegheven 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, doen (door de 3e. bepaling) $27\frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, maecke t'samen $27\frac{847}{1000}$. Ende door de selve reden sullen de 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ weerdich sijn $37\frac{675}{1000}$; Ende de 875 ⓪ 7 ① 8 ②

Página de la obra de Simon Stevin *El Décimo* (*De thiende*). Si bien Stevin, uno de los más grandes matemáticos del siglo XVII, no inventó los decimales, éstos llegaron a ser ampliamente conocidos gracias a esta obra que los explica en detalle. El autor deseaba enseñar a todos "cómo ejecutar, de manera fácil y no sabida hasta ahora, todos los cálculos con enteros y fracciones necesarios entre los hombres". Stevin no utilizaba aún el punto decimal, sino que empleaba los símbolos 0, 1, 2,..., encerrados en un circulito, para indicar unidades, décimos, centésimos y así sucesivamente. Por ejemplo, escribía 3.1416 de la siguiente manera:

3 ⓪ 1 ① 4 ② 1 ③ 6 ④

o

⓪	①	②	③	④
3	1	4	1	6

2. Encuentra en la siguiente lista los números que son más grandes que 2.63 y más pequeños que 3.87 y escríbelos de menor a mayor.

2.629, 2.600, 3.95, 4, 2.95, 3.05, 2.850, 3.0001,
2.5, 2.945, 2, 3.869, 2.631, 1.835, 2.65, 3.750, 3.9

3. Dado el número decimal 11.345, encerrarlo entre dos enteros naturales consecutivos, entre dos números con una sola cifra decimal, etcétera.

Por ejemplo

$$11 < 11.345 < 12$$
$$11.3 < 11.345 < 11.4$$
$$11.34 < 11.345 < 11.35$$

La escritura de un número decimal como un entero más un determinado número de décimos, centésimos, etcétera, ayudará a que se comprenda por qué los procedimientos para sumar y restar decimales son tan similares a los utilizados para realizar las mismas operaciones con naturales. Sin embargo, deberá tenerse en cuenta que cuando los números no tienen la misma cantidad de cifras decimales, los alumnos tienden a equivocarse, sobre todo si se trata de restarlos, por lo que podría ser conveniente explicarles cómo se procede en estos casos.

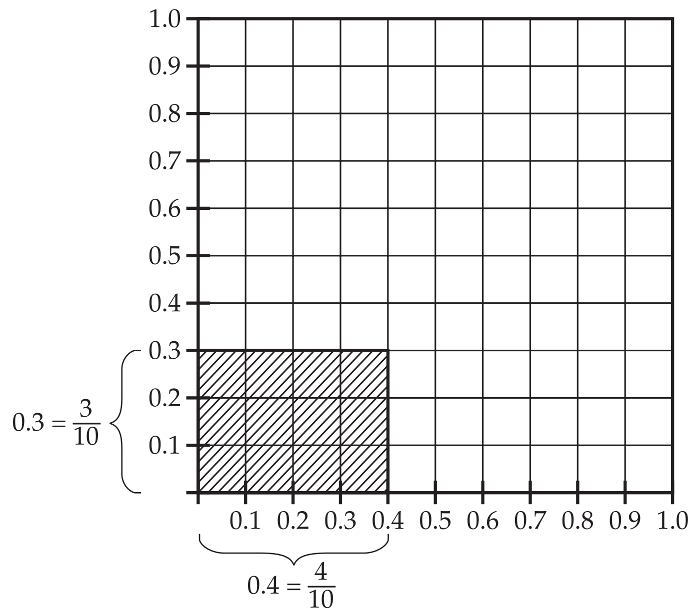
Antes de introducir la multiplicación y división de decimales, convendrá que se exploren y comprendan las reglas para multiplicar y dividir un número decimal entre 10, 100, 1 000,..., así como por 0.1, 0.01, 0.001,...

Para avanzar hacia el producto de dos decimales, se podrá utilizar el modelo de áreas.

Por ejemplo

1. $03 \times 0.4 =$

$$0.3 \times 0.4 = \frac{3}{10} \times \frac{4}{10}$$
$$= \frac{12}{100}$$
$$= 0.12$$



Una vez que por medio de problemas sencillos los alumnos se hayan acostumbrado a las ideas importantes, el profesor podrá presentar el algoritmo usual para que lo practiquen. Para disminuir el número de errores y ayudar a que se recuerden y apliquen correctamente las reglas para ubicar el punto decimal, es recomendable que se habitúen a estimar mentalmente el resultado de sus operaciones antes de realizarlas.

La división entre decimales podrá introducirse apoyándose en las ideas que se desarrollaron al dividir enteros naturales, así como en el uso de la calculadora. Un poco más adelante, cuando se comprendan mejor las fracciones, el profesor podrá explicar el porqué de las reglas para ubicar el punto decimal.

Los alumnos también deberán aprender a utilizar números truncados y redondeados como una forma de simplificar los cálculos y estimar resultados.

Finalmente, es conveniente que haya actividades para que se observe el efecto de multiplicar repetidamente un número por otro menor o mayor que uno, por ejemplo, por 0.9 o por 1.1.

Problemas para ejercitar con los procedimientos de cálculo

Las matemáticas son ricas en situaciones que pueden aprovecharse para ejercitar con los procedimientos de cálculo, sin necesidad de caer en prácticas rutinarias o faltas de interés para los alumnos.

Por ejemplo

1. *Un número sorprendente*

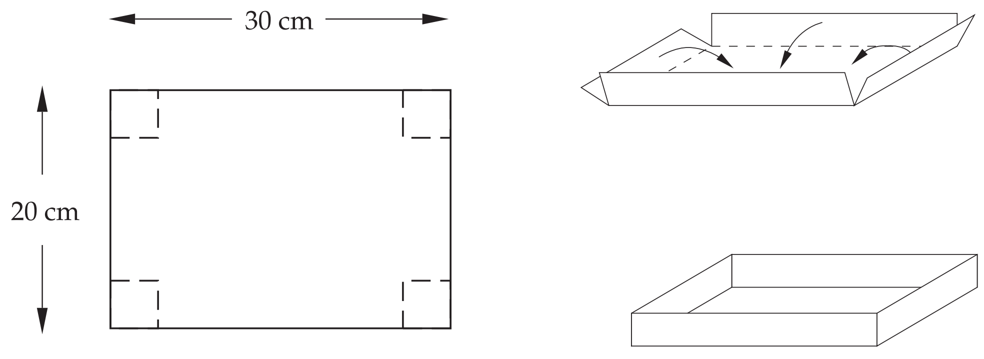
Toma el número 326 y realiza los siguientes pasos:

a) Reordena las cifras para obtener el mayor número posible.
b) Ahora reordénalas para obtener el menor número posible.
c) Resta el menor del mayor.
d) Vuelve a comenzar, pero partiendo del resultado obtenido en el inciso c, hasta llegar al número 495.

Repite los pasos anteriores tomando como punto de partida diferentes números de tres cifras. Investiga lo que ocurre si realizas los incisos *a, b, c* y *d* utilizando números de dos cifras, de cuatro cifras, etcétera.

2. *El problema de la cajita*

A partir de un pedazo de lámina rectangular que mide 20 cm por 30 cm se va a fabricar una cajita, cortando cuadritos en las esquinas y luego doblando como se indica en la figura. ¿Cuál será el volumen de la cajita si los cuadritos miden 1, 2 , 3..., centímetros de lado? ¿De qué tamaño deberán ser los cuadritos para que la cajita tenga el mayor volumen posible? (Se puede sugerir al alumno hacer una tabla.)

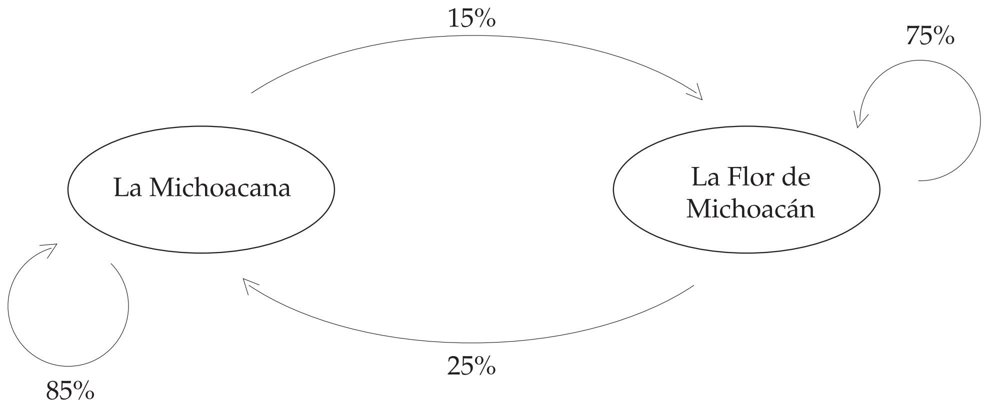


3. *Un plan de ahorros*

El papá de Juanita participa en una caja de ahorros donde le pagan un interés de 1% mensual. Si deposita $50 mensuales en la caja, ¿cuánto habrá ahorrado al cabo de 1, 2, 3, ..., meses? ¿Cuánto tardará en juntar $ 1 000?

4. *Historia de dos tiendas*

En un poblado con 1 000 clientes potenciales hay dos tiendas: "La Michoacana" y "La Flor de Michoacán". Cada mes, 85% de los clientes que compra en "La Michocana" queda satisfecho y vuelve a comprar en la misma tienda, mientras que el otro 15% cambia de tienda y compra en "La Flor de Michoacán". En cambio, de los clientes de "La Flor de Michoacán" sólo 75% regresa a comprar ahí, mientras que el restante 25% se va a comprar a "La Michoacana". Al principio del año 500 clientes compraban en "La Michoacana" y 500 en "La Flor de Michoacán". ¿Qué pasará al cabo de 1, 2, 3, ... meses? Investiga lo que ocurre si al principio eran 750 clientes los que compraban en "La Michoacana" y 250 los que compraban en "La Flor de Michoacán". Investiga también lo que ocurre para otros valores iniciales.



Problemas como los anteriores pueden tratarse a diferentes niveles, dependiendo del grado escolar en el que se planteen y la madurez de los alumnos. Los principiantes, sin mucha experiencia con el álgebra, podrán explorar la situación aritméticamente. Veamos por ejemplo cómo puede resolverse el último problema:

	La Michoacana	***La Flor de Michoacán***
Al principio:	500	500
Al cabo de un mes:	$0.85 \times 500 + 0.25 \times 500 = 550$	el resto, esto es, 450
Al cabo de dos meses:	$0.85 \times 550 + 0.25 \times 450 = 580$	420
Al cabo de tres meses:	$0.85 \times 580 + 0.25 \times 420 = 598$	402

y así sucesivamente.

Más adelante, los alumnos podrán escribir las fórmulas de recurrencia correspondientes:

$$M^0 = 500, \quad F_0 = 500$$

$$M_{n+1} = 0.85M_n + 0.25F_n$$

$$F_{n+1} = 0.75F_n + 0.15M_n \quad (\text{igual a } 1\,000 - M_n)$$

y organizar sus operaciones en una hoja de cálculo como la siguiente:

n	$0.85M_n$	$0.25F_n$	$M_{n+1} = 0.85M_n + 0.25F_n$	$F_n = 1\,000 - M_n$

Cálculo mental y estimación de resultados

La estimación de resutados la realizan las personas todos los días, en situaciones donde no hace falta un resultado exacto y basta con una aproximación. En la escuela, su práctica favorece el aprendizaje y retención de los hechos básicos, así como la exploración de las relaciones entre los números y sus operaciones. Al mismo tiempo, provee a los alumnos de medios para controlar sus cálculos y los resultados que se obtienen en la calculadora. Como se dijo antes, es importante que adquieran la costumbre de estimar el resultado de un cálculo antes de realizarlo, pues así se reducen los errores.

El cálculo mental se refiere a la serie de procedimientos que el alumno desarrolla mentalmente para operar, es decir, sin el apoyo del lápiz y el papel o ningún instrumento de cálculo.

El cálculo mental busca dar una respuesta exacta.

Para calcular mentalmente los alumnos pueden seguir diferentes caminos.

Por ejemplo

1. Calcula mentalmente $15 \times 6 \times 5$
Para calcular mentalmente, los alumnos pueden seguir diferentes caminos, en este caso pueden proceder de alguna de las siguientes maneras, u otras.

a) $15 \times 6 \times 5 \rightarrow 15 \times 2 = 30 \rightarrow 30 \times 3 = 90$

$\rightarrow 9 \times 5 = 45 \rightarrow 45 \times 10 = 450$

o

b) $15 \times 6 \times 5 \rightarrow 15 \times 6 = 90 \rightarrow 9 \times 5 = 45 \rightarrow 45 \times 10 = 450$

o

c) $15 \times 6 \times 5 \rightarrow 6 \times 5 = 30 \rightarrow 3 \times 15 = 45 \rightarrow 45 \times 10 = 450$

o

d) $15 \times 6 \times 5 \rightarrow 15 \times 5 = 75 \rightarrow 75 \times 2 = 150 \rightarrow 150 \times 3 = 450$

2. Calcula mentalmente 317 + 589

Para estimar el resultado de sumar 317 + 589 algunos alumnos razonarán como sigue: *a) 300 más 500 hacen 800; 17 más 89 son un poco más de 100. Entonces 317 + 589 son un poco más de 900.*
b) Otros pensarán: *317 es un poco más que 300 y 589 es un poco menos que 600. Entonces 317 + 589 da alrededor de 900*. Quizá haya quienes piensen: *317 son casi 32 decenas y 589 son casi 59 decenas. Entonces el resultado son casi 91 decenas, esto es, casi 910.*

Los alumnos descubrirán poco a poco las formas que mejor les convengan para calcular y estimar mentalmente, para lo cual es esencial que realmente tengan la oportunidad de desarrollar y poner en práctica sus propias estrategias. Salvo por el uso de números truncados y redondeados para simplificar un cálculo, que debe ejercitarse porque son técnicas que se utilizan con frecuencia, no vale la pena convertir la práctica del cálculo mental en el aprendizaje de artificios para obtener o estimar rápidamente un resultado, pues se desvirtúan sus objetivos pedagógicos.

Por ejemplo

1. Sin utilizar papel y lápiz, calcula mentalmente:

a) 2 033 + 5 077

b) 15 030 + 34 115

c) $16 \times 25 \times 30$

d) $570 \times 100 - 1\,000$

e) $505 \times 5 \times 2$

f) $4 \times 37 \times 5$

2. Sin realizar las operaciones por escrito, ni con la calculadora, indica el número de cifras del resultado de las siguientes multiplicaciones:

	NÚMERO DE CIFRAS DEL PROBLEMA
a) 326×530	
b) $5\,235 \times 17$	
c) $4\,575 \times 305$	

3. Estima mentalmente los productos:

a) $3\,600 \times 106$ *b)* $2\,320 \times 150$ *c)* 235×410

4. Sin realizar cálculos en el cuaderno, indica en cada inciso cuál de los productos es mayor:

a) $15 \times 17 \times 3$ o $16 \times 12 \times 6$ *b)* 127×12 o 115×23

c) $2\,506 \times 13$ o $3\,625 \times 9$

5. Escribe el mayor número de divisores que puedas encontrar mentalmente de los siguientes números:

a) 216 *b)* 3 627 *c)* 9 102

Hay numerosas situaciones y problemas cuya estructura incita a los alumnos al cálculo mental y a explorar las relaciones entre los números y las operaciones.

Por ejemplo

1. Dados los números 2, 3, 5, 8, 10 y 25 y las operaciones +, –, × y ÷ obtener todos los números del 0 al 100 realizando el mínimo de operaciones y utilizando cada número una vez como máximo.

Por ejemplo, el número 56 puede obtenerse de varias maneras:

$8 \times (5 + 2) = 56$

$2 \times (25 + 3) = 56$

$3 \times (10 + 8) + 2 = 56$

$(5 \times 10) + (2 \times 3) = 56$

Podemos considerar que los mejores procedimientos son los dos primeros, pues utilizan menos números y operaciones.

Una variación del problema anterior consiste en escoger al azar seis números entre 1 y 100 y un resultado entre 1 y 1 000. Luego se pide a los alumnos que operando con los números traten de alcanzar o acercarse lo más posible al resultado.

2. Dados los números:

$$9,\ \ 75,\ \ 1,\ \ 9,\ \ 2,\ \ 4$$

alcanzar o aproximarse al número 948.

Una solución es:

$$948 = 75 \times (9 + 4) - 9 \times (2 + 1)$$

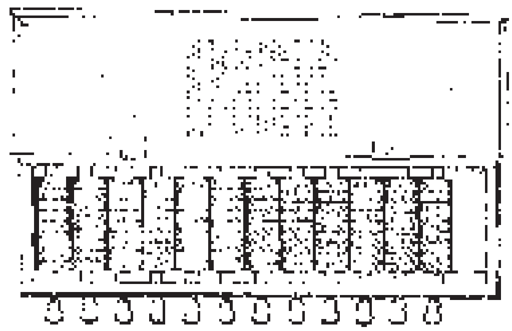
Uso de la calculadora

Las nuevas tecnologías han cambiado nuestra forma de hacer y pensar las matemáticas e influido fuertemente en otras disciplinas y áreas de la actividad humana. La disponibilidad de calculadoras y computadoras ha modificado drásticamente nuestro entorno y vida cotidiana, al hacer posible que los individuos y sus asociaciones —así como los pequeños comercios y empresas— puedan tratar y procesar una gran cantidad de información. Por esta razón es importante que los alumnos dispongan de calculadoras apropiadas, así como de oportunidades de acceso a una computadora para trabajar individualmente o en grupos pequeños.

Contrariamente a lo que a veces se piensa, el uso de la calculadora ni vuelve dependientes a los alumnos, ni empobrece el estudio de las matemáticas. En cambio, bien utilizada puede enriquecer el estudio de los contenidos de los cursos y aumentar las posibilidades de un aprendizaje significativo.

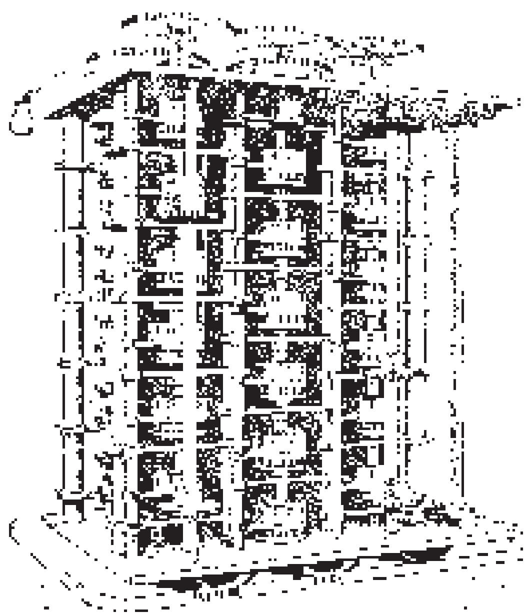
Cuando los alumnos disponen de una calculadora, es común que prefieran comparar dos números por medio de su diferencia, o comparar dos fracciones utilizando su expresión decimal. En estas situaciones los números con signo surgen de manera natural, se comprende el sentido de expresiones como $a - b > 0$ *significa* $a>b$ y las fracciones se ven como números y no sólo como la expresión de una cantidad o razón. La calculadora se vuelve un interlocutor que los conduce a prestar atención al orden como se realizan las operaciones y los prepara para las ideas asociadas a la jerarquía de operaciones y el uso de paréntesis. Las limitaciones de la pantalla les permiten familiarizarse con la notación exponencial, mientras que el uso de las teclas $\boxed{M+}$, $\boxed{M-}$ y $\boxed{+/-}$ los ayuda a comprender los diversos significados que puede tener el símbolo "–" cuando aparece en una expresión.

Precursores de las calculadoras electrónicas



Barras de Nappier (siglo XVII)

Máquina de Leibniz (siglo XVII)



Máquina de Babbage (siglo XIX)

Podemos utilizarla para que se exploren ciertos hechos o procedimientos básicos de la aritmética, como son el efecto de multiplicar varias veces un mismo número por otro menor que 1 y los procedimientos abreviados para multiplicar y dividir un número decimal por 10, 100, 1 000,..., para citar sólo dos ejemplos. También para diseñar situaciones didácticas donde el interés lo constituya la búsqueda y obtención de patrones numéricos y de operaciones, los cuales podrán más tarde expresarse como fórmulas o algoritmos para resolver problemas.

Muchos problemas del álgebra y materias más avanzadas se plantean fácilmente y pueden resolverse utilizando métodos numéricos. Antes no tratábamos estos problemas en nuestros cursos, pues los cálculos tomaban tiempo valioso de clase, o impedían concentrarse en otros aspectos. Ahora podemos utilizar la calculadora para que los alumnos tabulen y exploren los valores de una función, o para que localicen y calculen aproximadamente las raíces de ecuaciones. Para que estudien cómo cambia una cantidad que varía a tasa constante o para que simulen y observen la evolución de ciertos sistemas (por ejemplo, el problema de las dos tiendas que se trata de la página 51 a la 53).

La calculadora deberá emplearse a lo largo de todo el curso como un auxiliar en la resolución de problemas. Las primeras actividades servirán para que los alumnos se acostumbren a utilizarla para realizar las cuatro operaciones fundamentales y al uso de las teclas de memoria $\boxed{\text{M+}}$, $\boxed{\text{M}-}$ y $\boxed{\text{MR}}$. Es importante que se verifique el orden que sigue la calculadora al realizar las operaciones, ya que por lo general las calculadoras económicas siguen el orden en que éstas se introducen, mientras que las científicas respetan la jerarquía de las operaciones.

Por ejemplo

1. Al oprimir en mi calculadora las teclas $\boxed{5}\,\boxed{+}\,\boxed{6}\,\boxed{\times}\,\boxed{4}\,\boxed{=}$ obtengo 44 como resultado, lo que quiere decir que realiza las operaciones en el orden que se presentan, sin respetar su jerarquía:

$$(5 + 6) \times 4 = 44$$

¿Obtienes el mismo resultado en tu calculadora? ¿Cómo le hago para que mi calculadora realice las operaciones en el orden 5 + (6 ¥ 4) = 29?

Dos respuestas: se puede alterar el orden de los sumandos:

$$\boxed{6}\,\boxed{\times}\,\boxed{4}\,\boxed{+}\,\boxed{5}\,\boxed{=}$$

o bien, utilizar las teclas $\boxed{\text{M+}}$ y $\boxed{\text{MR}}$:

$$\boxed{5}\,\boxed{\text{M+}}\,\boxed{6}\,\boxed{\times}\,\boxed{4}\,\boxed{=}\,\boxed{\text{M+}}\,\boxed{\text{MR}}\qquad\boxed{\text{MR}}$$

Para borrar la memoria.

2. ¿Cómo se hace para realizar $56 - 2 \times 8 = 40$ en una calculadora que no respeta la jerarquía de las operaciones?

3. Utiliza la calculadora para completar la siguiente tabla de multiplicar.

$\times$	1000	100	10	1	0.1	0.01	0.001
15							
327							
5048							

¿Qué observas? Construye una tabla similar para investigar lo que ocurre al dividir entre ..., 10, 100, 1000... o bien entre 0.1, 0.01, 0.001, ...

4. Si en la pantalla de la calculadora ya aparecen los números de la izquierda, ¿qué operaciones tienes que realizar para que aparezcan los de la derecha?

NÚMERO INICAL	OPERACIONES	RESULTADO
a) 3.1625		3162.5
b) 86.326		0.86326
c) 41.125		4.1125
d) 0.0035		3.5

5. Después de introducir la operación, oprime cinco veces la tecla $\boxed{=}$ e indica lo que realiza la calculadora:

	¿QUÉ REALIZA LA CALCULADORA?
a) $3 + 5$ $\boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$	
b) $6 - 2$ $\boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$	
c) 3×4 $\boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$	
d) $128 \div 2$ $\boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$	

6. Realiza las siguientes operaciones en la calculadora e indica la secuencia de teclas que oprimiste para obtener el resultado.

a) $((5 \times 4) + 3) - (4 + 3 - 2) + 5 =$

b) $-(3 + 5 - 7) + (4 - 3 - 7) =$

c) $-((8 \times 4) - 3) + ((3 \times 9) + 5) =$

7. Para cada inciso, oprime la secuencia de teclas indicadas y utiliza paréntesis para escribir las operaciones que realiza la calculadora.

a) $\boxed{5}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{\text{M+}}\boxed{4}\boxed{+}\boxed{5}\boxed{-}\boxed{9}\boxed{\text{M+}}\boxed{4}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{\text{M+}}\boxed{\text{MR}}\boxed{\text{MR}}$

b) $\boxed{5}\boxed{+}\boxed{4}\boxed{-}\boxed{6}\boxed{=}\boxed{\text{M}-}\boxed{3}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{-}\boxed{8}\boxed{+}\boxed{4}\boxed{=}\boxed{\text{M+}}\boxed{\text{MR}}\boxed{\text{MR}}$

c) $\boxed{6}\boxed{\times}\boxed{4}\boxed{=}\boxed{\text{M}-}\boxed{6}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{-}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{\text{M+}}\boxed{5}\boxed{-}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{\text{M}-}\boxed{\text{MR}}\boxed{\text{MR}}$

Sistemas de numeración

Estamos tan familiarizados con nuestras formas de nombrar y representar los números que prestamos poca atención a muchas de sus características. Por ejemplo, casi no estamos conscientes de que el sistema que utilizamos para escribir los números no es el mismo que utilizamos para nombrarlos. Esta diferencia se traduce, entre otras cosas, en que podemos escribir todos los números, pero no es práctico nombrar números muy grandes, por lo que utilizamos la notación científica.

Todos los pueblos han desarrollado, desde la más remota antigüedad, sistemas para nombrar y representar números. Para ello utilizaron ideas muy similares, que fueron cambiando a medida que sus necesidades se hicieron más complejas. Al principio, cuando no había que manejar cantidades muy grandes, sólo se nombraban los números pequeños y para representarlos se hacían muescas sobre madera o piedra o se utilizaba cualquier otro sistema equivalente al siguiente:

$\mid$	1
$\mid\,\mid$	2
$\mid\,\mid\,\mid\,\mid$	4
$\mid\,\mid\,\mid\,\mid\,\mid\,\mid\,\mid\,\mid\,\mid$	9
$\mid\,\mid\,\mid\,\mid\,\mid\,\mid\,\mid\,\mid\,\mid\,\mid\,\mid\,\mid\,\mid$	13

En este sistema es fácil sumar y restar números pequeños, pues basta escribir cada sumando a continuación del otro o repetir el multiplicando tantas veces como indica el multiplicador:

3 + 4 $$\underbrace{\mid\,\mid\,\mid}_{3} + \underbrace{\mid\,\mid\,\mid\,\mid}_{4} = 7$$

3 × 4 $$\underbrace{\mid\,\mid\,\mid\,\mid}_{4} + \underbrace{\mid\,\mid\,\mid\,\mid}_{4} + \underbrace{\mid\,\mid\,\mid\,\mid}_{4} = 12$$

Pero apenas los números son un poco grandes, resulta difícil darse cuenta de las cantidades que están representadas:

||||||||||||||||||||||||||| ——————— 27

Podemos agrupar así:

||||| ||||| ||||| ||||| ||||| || ——————— 27

o así:

𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 || ——————— 27

Sin embargo, la ventaja de estos agrupamientos simples desaparece pronto:

Por ejemplo

1. 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ¿Qué cantidad representa este número, en nuestro sistema de numeración?

Con el tiempo, las sociedades evolucionaron y fue necesario manejar números cada vez más grandes. Se dio un paso adelante cuando se decidió formar grupos de grupos y utilizar nombres y símbolos diferentes para los agrupamientos que surgieron de esta manera. Así, con pocos símbolos y palabras se pudieron representar y nombrar números muy grandes.

Este sistema fue utilizado por los antiguos egipcios alrededor de 3 400 años antes de Cristo. Sus agrupamientos eran de 10 en 10 y utilizaban los siguientes símbolos:

𓏺	un bastón (rayo vertical)	1
𓎆	talón (arco)	10
𓍢	un rollo (enrrollada)	$100 = 10 \times 10$
𓆼	una flor de loto	$1\,000 = 10 \times 10 \times 10$
𓂭	un dedo señalando	$10\,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$
𓆐	un pescado (renacuajo)	$100\,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
𓁨	un hombre asombrado	$1\,000\,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

Por ejemplo, esta es la forma como los egipcios escribían el número 27 529:

𓂭𓂭 𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼 𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢 𓎆𓎆 |||||||||

Posteriormente los romanos también utilizaron otro sistema aditivo de numeración, pero sus símbolos y forma de agruparlos fueron distintos a los de los egipcios:

I	1	
V	5	
X	10	$= 2 \times 5$
L	50	$= 5 \times 2 \times 5$
C	100	$= 2 \times 5 \times 2 \times 5$
D	500	$= 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$
M	1 000	$= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$

Pudiera pensarse que en sistemas aditivos como el romano es irrelevante el orden en que aparecen los símbolos en la escritura de un número, puesto que los símbolos siempre tienen el mismo valor y la cantidad representada se obtiene sumando los valores de los símbolos. Sin embargo, para facilitar la lectura del número y darse cuenta con rapidez de su magnitud, los números romanos se escriben de manera que primero aparezcan los símbolos de mayor valor y luego los de menor valor:

MMM	CC	X	VIII
(tres mil)	(doscientos)	(diez)	(y ocho)

Como puede verse, nuestra forma de nombrar los números, no así la de escribirlos, es romana, salvo que algunos números tienen su propio nombre. Así VIII se lee *ocho* y no *cinco y tres*, XV *quince* y no *diez y cinco*, XX v*einte* y no *dos dieces*, etcétera.

Más adelante, los romanos introdujeron la convención de escribir números como el 4, el 9, el 40, ... en la forma siguiente:

IV	IX	XL
(4 = 5 –1)	(9 = 10 – 1)	(40 = 50 – 10)

Otras convenciones les permitieron la escritura abreviada de números grandes. Por ejemplo, 1 000 000 lo escribían $\overline{\text{M}}$, donde la rayita horizontal indicaba que mil, representado por M, se multiplicaba por mil para obtener un millón.

En sistemas como el romano se puede sumar y restar con bastante facilidad, aun si los números son grandes:

$$\begin{array}{rcccc} & \text{MM} & \text{D} & \text{XX} & \text{V} \\ + & \text{M} & \text{C} & \text{X} & \text{II} \\ \hline & \text{MMM} & \text{DC} & \text{XXX} & \text{VII} \end{array}$$

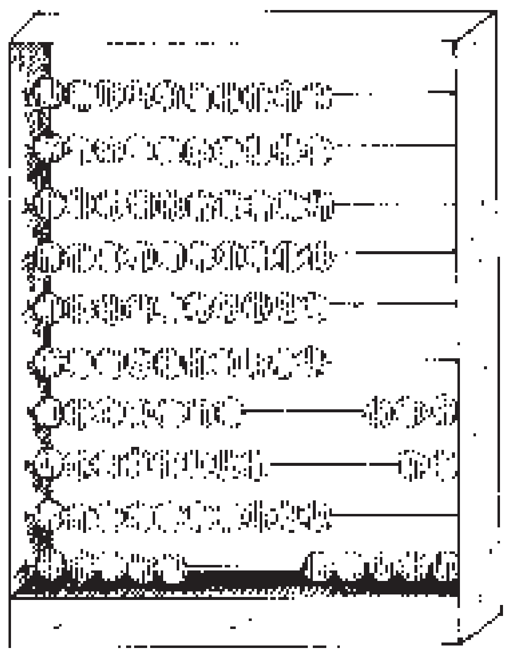
Pero resulta complicado multiplicar y dividir. Además, para escribir números cada vez más grandes se hace necesario inventar nuevos símbolos o introducir nuevas convenciones.

Para evitar las incomodidades de operar con sistemas como el romano, muchos pueblos de la antigüedad calculaban con el ábaco. Aun después de que se introdujo en Europa el sistema indoarábigo de numeración, hubo quienes lo siguieron utilizando para sus cálculos y hasta se realizaron competencias para ver quiénes efectuaban más rápido las operaciones: los abacistas (que utilizaban el ábaco) o los algoristas (que utilizaban los algoritmos del sistema decimal).

Grabado que ilustra una competencia entre algoristas y abacistas.

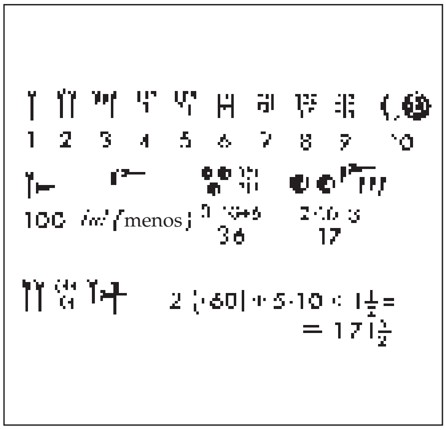
En un ábaco común, como los que conocemos, el valor de cada cuenta depende de la hilera donde se encuentra; partiendo de abajo hacia arriba, las cuentas de la primera hilera representan unidades, las de la segunda representan decenas, las de la tercera centenas, y así sucesivamente.

Está representado el número:
$3205 =$
$3 \times 1000 + 2 \times 100$
$+ 0 \times 10 + 5 \times 1$



← 3×1000
← 2×100
← 0×10
← 5×1

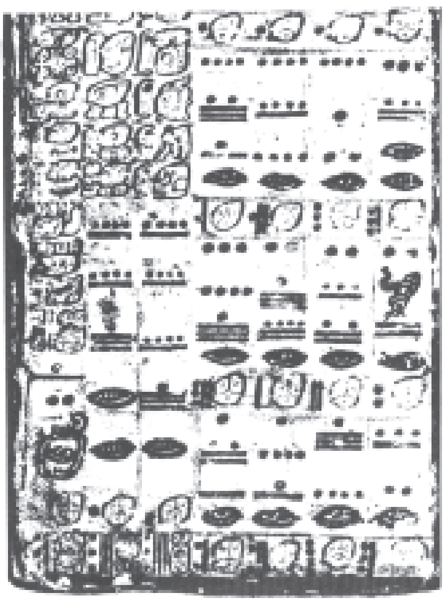
Es interesante observar que si bien el ábaco es un instrumento muy antiguo, nuestro sistema de numeración, que no es otra cosa que una copia del sistema del ábaco, es bastante más moderno, pues apenas fue inventado por los hindúes en el siglo IX de nuestra era e introducido por los árabes a Europa en el siglo X. En realidad, aproximadamente 5000 años antes de Cristo los habitantes de la antigua Babilonia usaban una escritura posicional muy parecida al sistema del ábaco; pero su base era muy grande, ya que agrupaban de 60 en 60 y al principio no tenían un símbolo para representar el 0, sino que cuando un agrupamiento no aparecía en la escritura de un número, dejaban el espacio en blanco, lo que da lugar a posibles confusiones en la escritura de los números. Más adelante utilizaron un símbolo especial que hacía el papel que el 0 juega en nuestro sistema. Pero la introducción de este símbolo no eliminó totalmente las ambigüedades, pues parece que sólo lo utilizaban en posiciones intermedias, ya que no se conservan trazas de su uso al final de la escritura de un número.



Ejemplos de la escritura cuneiforme de los numerales.

En la actualidad, el sistema sexagesimal se sigue utilizando para medir ángulos y cuando las horas se dividen en 60 minutos y los minutos en 60 segundos.

En México y América Central, por su parte, los mayas inventaron un sistema donde ya se utilizaba un símbolo para el 0. Sus agrupamientos eran de 20 en 20, salvo el segundo, que era de 18, lo que desde el punto de vista moderno puede ser visto como un inconveniente.



Algunos ejemplos de numerales mayas (códices de Dresde). En la segunda columna de la izquierda están, leyendo de arriba hacia abajo, los numerales 9, 9, 16, 0, 0 que representan el número $9 \times 144\,000 + 9 \times 7200 + 16 \times 360 + 0 + 0 = 1\,366\,560$. En forma similar, los numerales que aparecen en la tercera columna representan el número: $1\,364\,360 = 9 \times 144\,000 + 9 \times 7200 + 9 \times 360 + 16 \times 20 + 0$

No es correcto decir que el sistema babilónico es inadecuado porque la base es un número muy grande, o que el maya lo es porque los agrupamientos no siguen un patrón regular y el segundo es de 18 en lugar de ser de 20. Los números 60 y 18 satisfacían sus necesidades mejor que la base 10 que actualmente utilizamos, pues estos sistemas fueron desarrollados sobre todo para llevar registro de observaciones astronómicas y del tiempo.

Por otro lado, el sistema sexagesimal de los babilonios tiene, desde un cierto punto de vista, ventajas que no tiene el sistema decimal. Una cantidad formada por sesenta unidades puede dividirse fácilmente en medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, décimos, doceavos, quinceavos, veinteavos, treintavos y sesentavos, mientras que otra formada por diez unidades sólo puede dividirse en medios, quintos y décimos. Además, los múltiplos y submúltiplos de las unidades que se obtienen con la base 60 están, en ciertos casos, mejor adaptados a las necesidades de la medición práctica que los que se obtienen con la base 10, como lo muestra el hecho de que en nuestro sistema de medición hay unidades, como el decímetro o el decámetro, que casi no se utilizan.

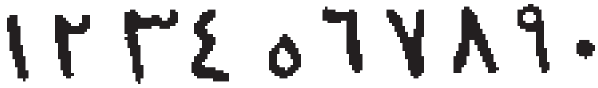
No insistiremos en nuestro sistema decimal de numeración pues es de sobra conocido por el lector. Se trata de un sistema posicional (porque el valor de una cifra depende del lugar que ocupa en la escritura del número), de base 10 (porque los agrupamientos son de 10 en 10). Tampoco es perfecto y algunos opinan que hubiera sido preferible que la base fuera 12 en lugar de 10. Como todo sistema, tiene la limitación de que cuando los números son muy grandes, o decimales muy pequeños, no es fácil darse cuenta del valor que representan, por lo que en estos casos se recurre con frecuencia a la notación científica o se escogen las unidades de manera que al medir resulten números comprensibles, dentro del rango de los números que estamos acostumbrados a manejar.

Lectura

Nuestros numerales*

Los numerales que utilizamos actualmente tienen su origen en los numerales hindúes, llevados a Bagdad, en Irak, hace aproximadamente mil años.

Los numerales árabes utilizados en aquella época, y también en la actualidad, son:



Obsérvese que el cinco es igual a nuestro cero y que el cero es simplemente un punto.

Más cercano a nuestro tiempo, el siguiente es el ejemplo más antiguo que se conoce de la forma como aparecían los numerales en los manuscritos europeos. Fue escrito en España en el año 976 d. C.

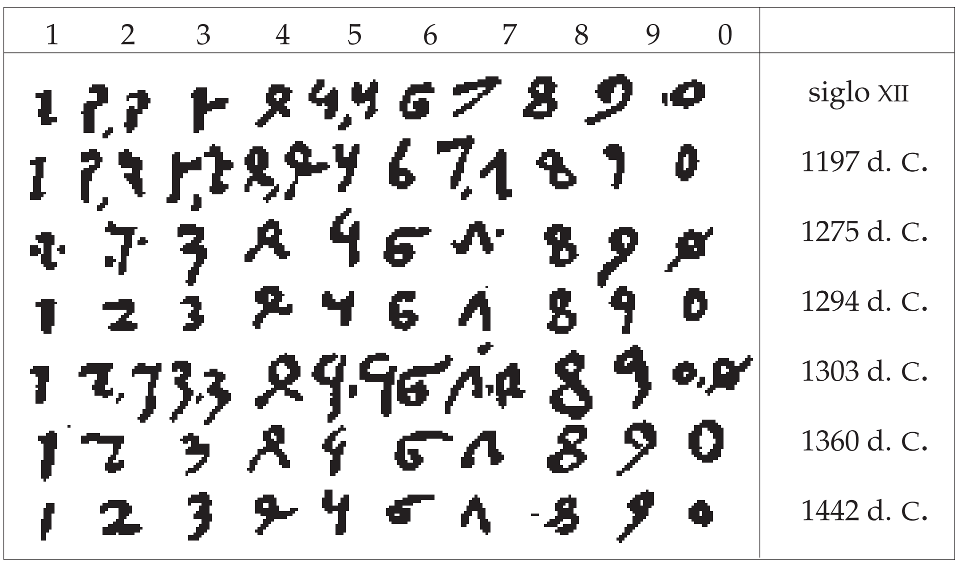
La comparación del sistema decimal con otros sistemas de numeración favorecerá su comprensión. Además, la evolución de los sistemas de numeración constituye un capítulo accesible de la historia de las matemáticas, que da al profesor la oportunidad de platicar con sus alumnos sobre la forma como el desarrollo e invención de nuevas matemáticas responde a la evolución de las necesidades del hombre.

Los sistemas de numeración podrán estudiarse al momento de revisar la lectura y escritura de números naturales, sin hacer de ellos una unidad o tema separado. No se busca que los alumnos memoricen los símbolos que sirven para representar los números en diferentes sistemas, ni que se vuelvan expertos en operar con éstos, sino que comprendan sus principios y puedan contrastarlos con los del sistema decimal. También es conveniente que conozcan otros sistemas posicionales con bases diferentes de 10, pero quizás no sería recomendable avanzar mucho más allá de la representación en base dos de los primeros números naturales.

1. Se sugiere que los alumnos realicen una investigación sobre las civilizaciones cuyos sistemas se estudien en clase, que vean el grado de desarrollo que alcanzaron en las matemáticas y otras disciplinas y actividades, y sus contribuciones al desarrollo humano.

Para que se acostumbren a los símbolos y los principios en los que se basan los distintos sistemas de numeración, se les podrán proponer ejercicios como los de la siguiente página.

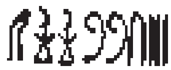
La tabla siguiente muestra los cambios de nuestros numerales desde que comenzaron a utilizarse en España, hasta los inicios de la impresión.



☞

1. Completar las siguientes tablas.

a)

Sistema de numeración egipcio				
Sistema de numeración decimal		8 076		30 138

b)

Sistema de numeración romano		DCCLIX		$\overline{\text{M}}$MCMLXIII
Sistema de numeración decimal	399		3 824	

Después de la invención de la imprenta, los numerales cambiaron poco, salvo por el 4 y el 5. Incluso en nuestro tiempo los numerales siguen cambiando, en un intento de encontrar el tipo más legible. Por ejemplo, ¿cuáles de los siguientes tipos resultan más fáciles de leer?

1234567890 1234567890 1234567890

Finalmente, he aquí como aparecen los numerales en la pantalla de cristal de una calculadora electrónica:

*Adaptado del artículo "De los números a los numerales y de los numerales al cálculo", en D.E. Smith y J. Ginsburg Sigma, *El mundo de las matemáticas,* México, Grijalbo, 1974.

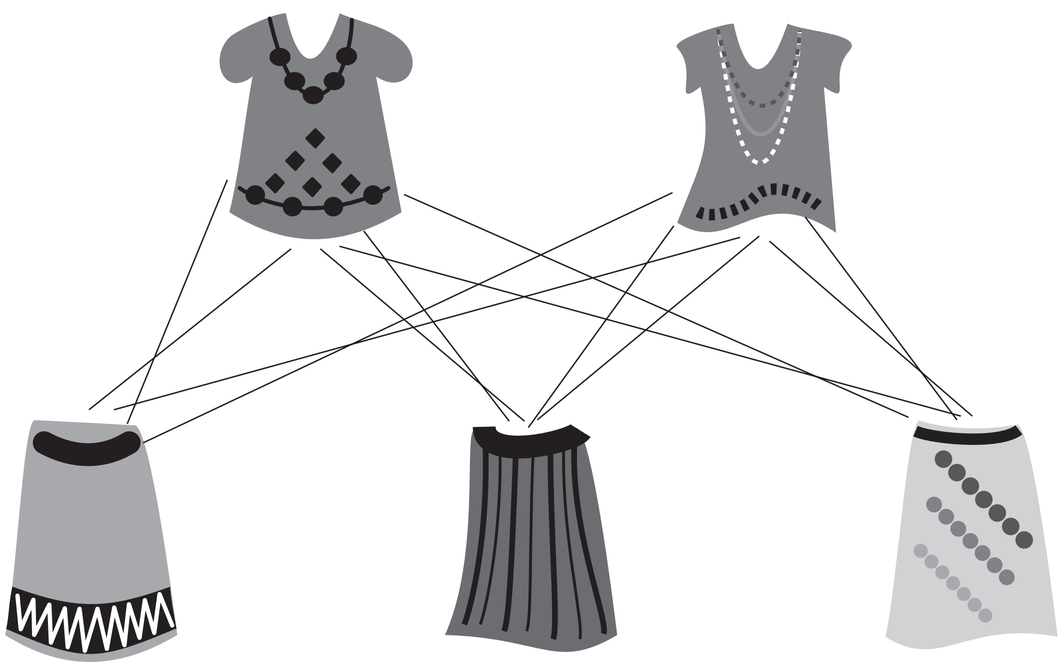
Problemas de conteo

La resolución de problemas de conteo enriquece el significado que los estudianres tienen de las operaciones aritméticas y facilita la comprensión de nociones importantes para la probabilidad. La idea es que los alumnos exploren de manera informal algunas de las situaciones típicas del conteo, sin intentar de ninguna manera llegar a fórmulas. Hay fuertes evidencias de que aun para estudiantes más avanzados, la combinatoria no es algo fácil de aprender, por lo que una enseñanza prematura de las fórmulas y procedimientos de esta disciplina, sin una larga experiencia previa en la resolución de problemas de conteo, puede dar lugar a resultados no deseados.

Para que los alumnos desarrollen sus estrategias de conteo, es recomendable que tengan la oportunidad de resolver este tipo de problemas a lo largo de toda la enseñanza, en las situaciones más variadas, comenzando desde que se revisan las operaciones con naturales. También es conveniente, sobre todo al principio, que tanto los problemas propuestos como sus datos, faciliten el uso de diagramas de árbol, arreglos rectangulares y otros tipos de representaciones.

Por ejemplo

1. María tiene dos blusas y tres faldas. ¿De cuántas formas diferentes puede combinarlas para vestirse?



2. En una escuela los alumnos tienen que elegir un deporte y un taller para cursarlos. Los deportes que se ofrecen son: futbol, basquetbol, volibol y atletismo. Los talleres son: carpintería, electricidad y mecanografía. ¿De cuántas formas distintas puede un alumno combinar estas opciones? Acaba de llenar la siguiente tabla.

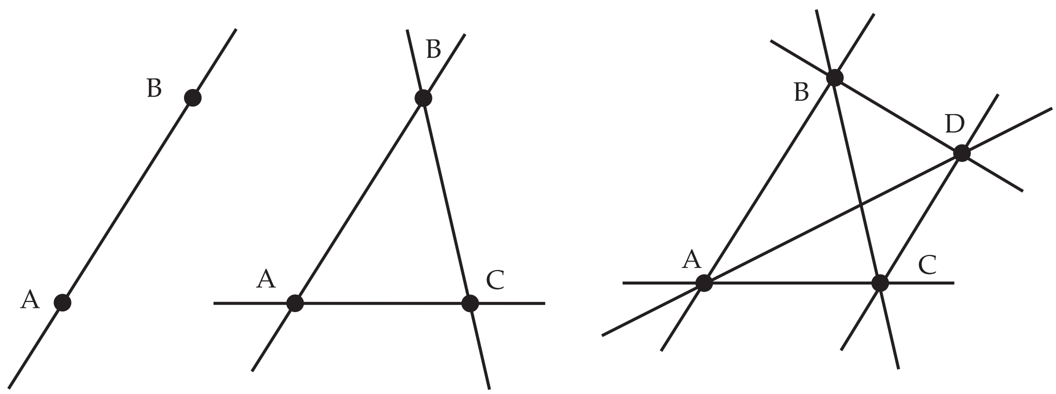
Deporte / Taller	Basquetbol	Futbol	Volibol	Atletismo
Carpintería	Basquetbol y Carpintería			
Electricidad				
Mecanografía			Volibol y Mecanografía	

Si a los deportes se agregara la natación y a los talleres la herrería, ¿cómo aumentaría el número de combinaciones posibles? ☐

3. Cinco amigos se encuentran en la calle y se saludan de mano. ¿Cuántos apretones de mano hubo en total? ¿Y si hubieran sido 6, 7, 8, ... amigos?

4. Un torneo de tenis se realiza por eliminación simple, es decir, cada vez que se enfrentan dos jugadores, el que pierde queda eliminado. Si en el torneo participan 64 tenistas, ¿cuántos juegos hacen falta para decidir quién es el campeón?

5. Dos puntos determinan una recta; tres puntos, si no son colineales, determinan tres rectas. Investiga lo que pasa con 4, 5, 6, ... puntos.



6. En un torneo de volibol participan 12 equipos de escuelas diferentes. Cada equipo se enfrenta a otro dos veces, una vez como local y otra como visitante. ¿Cuántos juegos se realizan en total?

7. Se quiere ir de una ciudad A a una ciudad M, pasando por las ciudades P y Q. De A a P hay cuatro caminos, de P a Q hay dos y de Q a M hay tres. ¿De cuántas formas diferentes se puede ir de A a M?

8. ¿Cuántas banderas de tres franjas y colores diferentes pueden hacerse si se dispone de tela de cinco colores? ¿Y si se permite repetir un mismo color en franjas separadas?

9. De un grupo de cinco niñas y cuatro niños se va a escoger una niña y un niño para formar una pareja de baile. ¿De cuántas formas diferentes puede integrarse la pareja?

10. ¿Cuántos resultados diferentes pueden obtenerse al lanzar dos dados cuyas caras están marcadas con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6? □

Es recomendable que desde los primeros problemas de conteo los alumnos exploren los efectos de modificar los datos de un problema.

Por ejemplo

11. Respecto al problema 1 de la p. 67 podemos preguntarles cuántas formas de vestirse tendría María si en lugar de dos blusas y tres faldas, tuviera tres blusas, tres faldas y dos pantalones.

12. En el problema de los caminos, podemos decirles que actualmente se construyen dos caminos más: uno de A a P y otro de Q a M y preguntarles cuántas formas de ir de A a M habrá cuando se terminen, etcétera.

También podemos pedirles que elaboren tablas.

Por ejemplo

13. Elaboren una tabla donde aparezca el número de resultados diferentes que pueden obtenerse al lanzar 1, 2, 3, ..., volados.

Los juegos con números y cifras son una buena oportunidad para que los alumnos resuelvan problemas sencillos de conteo al mismo tiempo que ejercitan otras nociones.

Por ejemplo

1. Encontrar todos los números de cuatro cifras que cumplan que las cifras de las unidades y los millares sean iguales entre sí y que la suma de sus cifras sea 20.

2. ¿Cuántos números hay entre 0 y 100 que tengan al menos un 7 entre sus cifras? ¿Y entre 0 y 1 000?

3. ¿Cuál es el mayor número que puede formarse permutando las cifras de 745 (o de 3 993)? ¿El menor? ¿Cuántos pueden formarse menores que 500 (o 5 000)? ¿Cuántos pueden formarse en total? □

La multiplicación de números naturales aparece por lo común asociada a la idea de una suma repetida: $3 \times 5 = 5 + 5 + 5$. Los problemas de conteo permiten que los alumnos relacionen esta operación con las diversas formas de combinar o arreglar objetos. Una vez que se haya comprendido esta relación por medio del uso de diagramas de árbol o arreglos rectangulares, podremos proponerles problemas donde se aplique la regla del producto (pero la fórmula en sí no será objeto de enseñanza).

REGLA DEL PRODUCTO

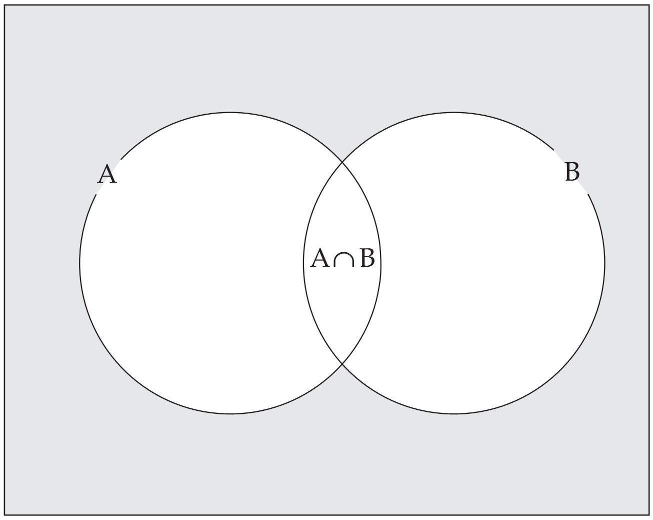
Si para formar la pareja AB o (A,B) hay n formas de elegir A y m formas de elegir B, entonces pueden formarse $n \times m$ parejas diferentes.

De este modo, si Juan tiene 5 camisas y 4 pantalones, entonces puede combinarlos en $5 \times 4 = 20$ formas diferentes para vestirse.

Por ejemplo

1. ¿Cuántos números distintos de dos, tres, cuatro,..., cifras se pueden formar utilizando los dígitos del 0 al 9? ¿Y si no se vale que las cifras se repitan en el número? ¿Y si sólo se permite usar las cifras 1, 2, 3, 4 y 5?

2. El número de matrícula (placa) de un automóvil está formado por tres letras y tres dígitos, incluido el cero. ¿Cuántas placas pueden hacerse con este sistema si las tres letras pueden ir al principio o al final, pero no mezcladas con los dígitos? ¿Y si no se permiten números con ceros al principio?



También es conveniente que se resuelvan problemas construidos a partir del esquema siguiente (pero tampoco esta fórmula será objeto de enseñanza).

$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$

Al principio los problemas deberán ser tales que los alumnos puedan resolverlos por tanteo, explorando mentalmente las relaciones entre los datos del problema o construyendo sus propias representaciones. Más adelante se les podrá proponer que utilicen diagramas de Venn o de Carroll para resolverlos.

Por ejemplo

En una encuesta realizada entre los 145 alumnos de una escuela se encontró que:

85 alumnos juegan futbol

65 alumnos juegan basquetbol

50 no practican ninguno de estos deportes

¿Cuántos alumnos practican los dos deportes? ¿Cuántos practican el futbol, pero no el basquetbol? ¿Cuántos el basquetbol, pero no el futbol?

DIAGRAMA DE VENN

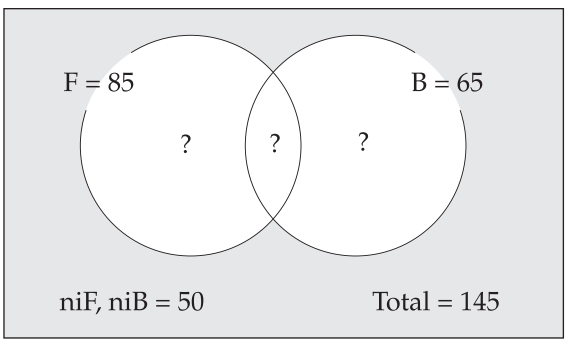


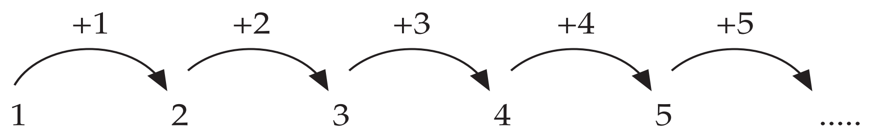
DIAGRAMA DE CARROLL

	B	NO B	
F	?	?	85
NO F	?	50	?
	65	?	145

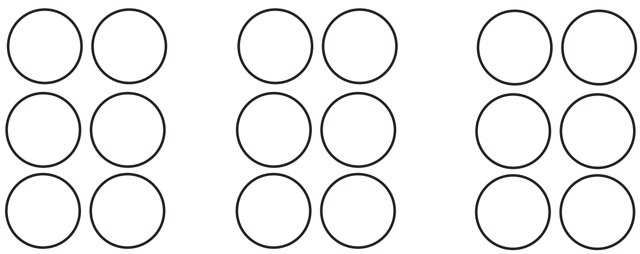
Aritmética entera

Múltiplos y divisores

Las primeras nociones aritméticas que se adquieren están ligadas a las operaciones de adición y sustracción. Los alumnos se dan cuenta pronto de que los enteros se generan sumando 1 cada vez:



Aprenden a comparar dos números analizando su diferencia y saben que un número es más grande o pequeño que otro según sobre o falte algo al compararlos. La operación misma de multiplicar es vista como una suma repetida.



$$6 + 6 + 6 = 6 \times 3 = 18$$

Es necesario que los alumnos exploren la estructura multiplicativa de los números y comprendan que éstos no se comportan igual frente a la multiplicación que frente a la adición o la sustracción. La búsqueda de múltiplos y divisores, la descomposición de un número en primos, o como el producto de otros números, no sólo son conocimientos importantes por sí mismos, sino que los preparan para el estudio de las fracciones y el álgebra.

Los profesores dedican tiempo del ciclo escolar al estudio de los criterios de divisibilidad y los procedimientos para obtener el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de dos números, pero algunos prestan poca atención al desarrollo de las nociones necesarias para comprender estos procedimientos. No es raro que al terminar la educación secundaria haya alumnos que todavía tengan dificultades para listar los primeros números primos, a los que confunden con los impares o los múltiplos de tres. Cuando se les pide dar los divisores de 54, pueden dar el 6 y el 9, pero a menudo olvidan que todo número es divisible entre 1 y sí mismo y casi no citan al 27 o el 18 entre los divisores.

Otras veces, cuando se les pide factorizar en primos el número 60 por ejemplo, trazan una raya vertical y encuentran los divisores primos utilizando el procedimiento usual, pero rara vez escriben la factorización $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Respuestas como las anteriores revelan que los alumnos no han tenido las oportunidades suficientes para familiarizarse con las nociones de divisibilidad y desarrollarlas. Por ello es conveniente que se les propongan actividades y problemas que los lleven a explorar informalmente y comprender estas nociones, respetando sus propios acercamientos y sin tratar de imponer o ejercitar prematuramente los algoritmos usuales para buscar múltiplos y divisores, o para factorizar números. Muchos de estos problemas podrán proponerse desde que se comienzan a estudiar la multiplicación y división con números naturales.

Por ejemplo

1. Completa la siguiente tabla.

Dividendo	Divisor	Cociente	Residuo
60	7		4
42	6	7	
	9	7	8
43		8	3
139	11	12	
170	13		1
	115	71	93
8 934		198	24

2. Coloca los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 en las siguientes tablas de manera que los productos de los números que aparecen en cada renglón y en cada columna sean los indicados en los márgenes.

a)

			15
			64
			378
28	36	360	

b)

			180
			42
			48
72	144	35	

3. Completa los siguientes cuadrados mágicos multiplicativos (los productos por hilera, por columna y por diagonales tienen que ser todos iguales entre sí).

a)

		50
	10	4
2	100	

b)

4		
	32	
		256

4. Un terreno que mide 80 m por 150 m se quiere parcelar para cultivo, en lotes de 20 m por 30 m. Haz un dibujo para indicar cómo lo dividirías. ¿Se puede parcelar un terreno de 110 m por 120 m en lotes de 20 m por 30 m? ¿Y uno de 70 m por 120 m en lotes de 20 m por 40 m?

5. ¿Cuántas cajitas de 5 cm de largo, 2 cm de fondo y 3 cm de alto caben en una caja de 28 cm de largo por 18 cm de fondo y 50 cm de alto?

6. De todos los rectángulos cuyos lados miden un número entero de unidades y área igual a 144, ¿cuál es el que tiene menor perímetro?

7. ¿Cuántos paralelepípedos de dimensiones enteras hay que tengan un volumen igual a 180 unidades cúbicas?

8. ¿En qué cifra terminan los números 2^{65}, 2^{144} y 2^{1507}? ¿Cuál es la cifra decimal de 1/7 que ocupa el lugar 269? □

Los criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad no tienen por qué presentarse como algo que sólo se estudia y practica por su utilidad para factorizar números y en la simplificación de fracciones. Por el contrario son una buena oportunidad para reflexionar sobre algunas de las características de nuestro sistema de numeración de base diez.

Supongamos, por ejemplo, que se quiere saber si 576 es divisible entre 3. Se puede llegar a la respuesta dividiendo entre 3, pero esta forma de proceder no nos informa de nada interesante. En cambio, si analizamos lo que ocurre al dividir cada centena y cada decena llegaremos con facilidad al criterio de divisibilidad entre 3. En efecto, cuando cada centena se divide entre 3, sobra una unidad, por lo que al repartir una a una las cinco centenas sobran 5 unidades. Luego vemos que al repartir cada decena entre 3, sobra una unidad y, por lo tanto, que al repartir las siete decenas sobran 7 unidades. Entonces, para que 576 sea divisible entre 3, basta con que la suma de lo que sobra al dividir las centenas y las decenas más el número de unidades, es decir, la suma de las cifras del número, sea divisible entre 3; como $5 + 7 + 6 = 18$ es divisible entre tres, 576 es divisible entre 3.

A partir de análisis similares podrán estudiarse los otros criterios usuales de divisibilidad. A continuación se ofrecen algunos problemas que podrán servir para que los alumnos estudien los criterios de divisibilidad.

1. Indica con una ✓ en la columna correspondiente los números que son divisibles entre 2, 3, 5 y 9.

	2	3	5	9
1 080				
3 335				
5 508				
6 229				
57 240				
82 725				

2. Encuentra el menor y mayor entero de cuatro cifras:

a) terminado en 5 y múltiplo de 3

b) terminado en 7 y múltiplo de 9

3. ¿De cuántas maneras distintas pueden llenarse los cuadritos en blanco para que el número resultante sea divisible entre 3 y entre 5?

$3\,\square\,7\,\square$

4. Considera todos los números que pueden obtenerse permutando (cambiando de lugar) las cifras de 8 025. ¿Cuántos son divisibles entre 2? ¿Entre 3? ¿Entre 5? ¿Entre 9?

Factorización y números primos

Las nociones de número primo, de mínimo común múltiplo y máximo común divisor pueden explorarse desde el primer grado por medio de problemas, pero los procedimientos basados en la factorización en primos de un número tendrán que esperar a que los alumnos maduren un poco más.

1. Las parejas de primos 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13, ... son llamadas *primos gemelos* porque tan sólo difieren entre sí en dos unidades. Encuentra todas las parejas de primos gemelos entre 1 y 100. Los números 3, 5 y 7 constituyen una terna de primos consecutivos tales que $5 - 3 = 2$ y $7 - 5 = 2$. ¿Habrá otra terna con estas características? Encuéntrala o explica por qué no la hay.

2. Los matemáticos han buscado, desde hace mucho tiempo, una fórmula para encontrar números primos, pero no han podido hallar una que sólo produzca primos al sustituir sucesivamente los valores 1, 2, 3,... en ella. Sustituye estos valores en las siguientes fórmulas e investiga cuál es el primer valor para el cual no se obtiene un número primo:

a) $p = n^2 + n + 5$

b) $p = n^2 + n + 11$

c) $p = n^2 + n + 17$

Investiga lo que ocurre con las fórmulas $p = n^2 + n + 7$ y $p = n^2 + n + 13$.

3. Con el 1 y ocho primos menores que 100 puede formarse un cuadrado mágico cuya suma es 111. Encuéntralo.

4. ¿Cuál es el menor número que puede dividirse entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10?

5. Considera las listas de los múltiplos de 72 y 84:

72, 144, 216, ...

84, 168, 252, ...

¿Cuáles son los números que aparecen en ambas listas? Escribe los seis primeros.

6. Se desea dividir un bloque de piedra de dimensiones $108 \times 144 \times 180$ centímetros en bloques cúbicos del mayor tamaño posible, sin que haya desperdicio. ¿Cuáles son las dimensiones de los cubos que se obtienen?

Los alumnos pueden entender la noción de número primo y darse cuenta, por medio de diversas situaciones, que la factorización en primos de un número es única. Pero las aplicaciones y procedimientos basados en estas nociones contienen sutilezas que lleva tiempo comprender. Aun algo que parece tan sencillo y cómodo de emplear como la Criba de Eratóstenes, requiere que se hayan dominado bien las relaciones entre las nociones de múltiplo y divisor (para estar conscientes de que eliminar los múltiplos de 2, 3, 5,... es equivalente a eliminar los números divisibles entre 2, 3, 5,...) y se comprendan intuitivamente algunos teoremas (por ejemplo, que si un número no es divisible entre 2, 3, 5,... entonces tampoco es divisible entre ninguno de los múltiplos de estos números).

Criba de Eratóstenes

Para encontrar los primos menores que 100, primero escribe la lista de los números del 1 al 100:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Después realiza los siguientes pasos:

1° Tacha el 1 de la lista, porque no se considera primo, y encierra el 2 en un círculo porque es primo.

Enseguida tacha todos los múltiplos de 2, excepto el 2, porque no son primos. (¿Por qué?)

2° El menor número mayor que 2 que no tachaste es el 3, enciérralo en un círculo porque es primo. (¿Por qué?)

Tacha todos los múltiplos de 3, excepto el 3, porque no son primos. (¿Por qué?)

3° El menor número que no has tachado o encerrado en un círculo todavía es el 5; enciérralo en un círculo porque es primo. (¿Por qué?)

Tacha todos los múltiplos de 5, excepto el 5, porque no son primos. (¿Por qué?)

4° Continúa en la misma forma hasta encontrar todos los primos menores que 100. □

Conviene que la presentación de los algoritmos para calcular el m.c.m. y el m.c.d. esté precedida de problemas que permitan explorar la estructura de la descomposición en primos de un número. Así se podrá pedir a los alumnos ejemplos de números que tengan exactamente 3, 4, 5, ... factores y que digan lo que observan en su factorización prima. La introducción del algoritmo para encontrar el m.c.d. podrá prepararse pidiéndoles que utilicen la descomposición en primos para encontrar todos los divisores de un número o la lista de los divisores comunes a dos números, etcétera.

Es recomendable que los alumnos calculen el m.c.d. y m.c.m. de dos o más números utilizando diversos procedimientos y no sólo los basados en la descomposición en primos de un número. El propósito no es que los aprendan de memoria, sino que conozcan su existencia y puedan comparar varios algoritmos.

Algoritmo de Euclides para obtener el m.c.d. de dos números

1. Encontrar el máximo común divisor de 420 y 990.

Primero se divide el mayor entre el menor de los números:

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 2 \\ \hline 420 & 990 \\ & 150 \end{array}$$

Luego se divide el divisor entre el residuo:

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 2 \\ \hline 150 & 420 \\ & 120 \end{array}$$

Lectura

Famosos problemas no resueltos de la aritmética superior

Algo que distingue a la aritmética superior o teoría de números de otras partes de las matemáticas es la gran dificultad que encierra demostrar algunos resultados que, por otro lado, son fácilmente sugeridos por la experiencia numérica y cuyo enunciado es accesible a cualquier persona, aun jóvenes de la secundaria. Como decía Carl Friedrich Gauss, uno de los mayores genios matemáticos de la historia: *"Es precisamente esto lo que da a la aritmética superior ese encanto mágico que la ha hecho la favorita de los matemáticos más grandes".*

En seguida se verán algunos ejemplos de conjeturas sobre los números que no han podido ser demostradas todavía.

1. El último teorema de Fermat. *Si n es un número mayor que 2, entonces no hay números enteros* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ *e* $\boldsymbol{z}$ *que satisfagan la ecuación:*

$$x^n + y^n = z^n$$

RESUELTO

Es interesante notar que Fermat anotó en una página de un libro que disponía de una prueba de esta conjetura, pero que el margen no le daba espacio para escribirla. Desde entonces la demostración de esta conjetura obsesiona a los matemáticos, pero no han podido encontrarla.

2. La conjetura de los primos gemelos. *Hay un número infinito de primos cuya diferencia es 2. Por ejemplo:*

3 y 5, 5 y 7, 11 y 13, 17 y 19, ... ¿?

Nótese que 3, 5 y 7 son primos consecutivos tales que $5 - 3 = 2$ y $7 - 5 = 2$, pero puede probarse fácilmente que es la única terna de primos con esta propiedad. (¿Cómo?)

3. Conjetura de Goldbach. *Todo número par mayor que 2 puede escribirse como la suma de dos primos. Por ejemplo:*

$4 = 2 + 2$

$6 = 3 + 3$

$8 = 3 + 5$

$10 = 5 + 5$, o $3 + 7$

$12 = 5 + 7$

$14 = 7 + 7$, o $3 + 11$

¿y así sucesivamente?

☞

Como el residuo todavía no es cero, continuamos en la misma forma:

$$120 \overline{\smash{)}\,150} \quad \text{cociente } 1, \text{ residuo } 30$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 120 & 150 \\ & 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 30 & 120 \\ & 0 \end{array}$$

4. La conjetura de los números perfectos impares. *No hay ningún número perfecto que sea impar, esto es, no hay ningún número impar que sea igual a la suma de sus divisores propios.* En cambio es relativamente fácil exhibir ejemplos de números perfectos pares:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

Euclides probó hace más de dos mil años que si $2^p - 1$ es un primo, entonces $2^{p-1}(2^p - 1)$ es perfecto; y en el siglo XVIII Leonardo Euler, el más grande matemático de ese siglo junto con Lagrange, probó que todo número perfecto par es de esta forma. Así, como $2^3 - 1 = 7$ es primo, se tiene que $2^2(2^3 - 1) = 4 \times 7 = 28$ es perfecto:

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

5. Conjetura de Ulam. *Si un entero es par, divídalo entre dos. Si es impar, multiplíquelo por 3 y sume 1. Si aplica este proceso repetidamente a los resultados que va obteniendo siempre llegará a uno*. Por ejemplo, si comienza con 24, los resultados que obtendrá serán:

$$12,\ 6,\ 3,\ 10,\ 5,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1$$

La conjetura de Ulam es uno de los últimos pasatiempos de los matemáticos. En una universidad, los profesores del Departamento de Matemáticas deben firmar junto con su contrato un compromiso de que no perderán el tiempo tratando de demostrarla.

Las ideas de divisibilidad, números primos y descomposición en primos de un número constituyen el fundamento de toda la aritmética superior. Al diseñar sus actividades en clase, el profesor no debe olvidar que la teoría elemental de los números es rica en situaciones y problemas que se plantean con facilidad y que los alumnos pueden explorar activamente, al mismo tiempo que desarrollan nociones que les servirán para comprender otras partes de las matemáticas y apreciar la belleza de esta disciplina.

Una vez que se llega a un resto igual a 0 el proceso se detiene y el m.c.d. buscado es el residuo de la penúltima división realizada. En nuestro ejemplo, el m.c.d. de 420 y 990 es 30, como puede verificarse utilizando otro procedimiento.

El algoritmo de Euclides para calcular el m.c.d. resulta por lo general más sencillo y cómodo de emplear que los métodos basados en la descomposición en primos de los números. Una vez que se dispone de un método económico para calcular el m.c.d. de dos números *a* y *b*, el m.c.m. puede obtenerse fácilmente utilizando la fórmula:

$$\text{m.c.m.}(a,b) = \frac{ab}{\text{m.c.d.}(a,b)}$$

Las fracciones

Nociones básicas

El estudio de las fracciones es importante por sí mismo y porque permite el desarrollo de nociones útiles para el conocimiento de temas más avanzados, como son el razonamiento proporcional y el estudio de las expresiones racionales en el álgebra. Su aprendizaje no es fácil, por lo que muchos alumnos terminan la educación secundaria y llegan a niveles superiores con un dominio insuficiente de las fracciones, a pesar de que su estudio comienza desde la primaria.

Con objeto de facilitar su adquisición permanente, los programas proponen que las fracciones y sus operaciones se estudien durante toda la educación secundaria. En el primer y segundo grados se verán las fracciones comunes, sus significados, operaciones y algoritmos para realizarlas. En el tercer grado se verán las expresiones racionales o fracciones algebraicas, lo que permitirá que los alumnos revisen y practiquen las operaciones con fracciones comunes.

Para que los procedimientos para operar con fracciones no resulten misteriosos e incomprensibles, es necesario plantear actividades y problemas que permitan a los alumnos desarrollar y comprender las nociones que subyacen en las fracciones y sus operaciones.

En primer lugar, los alumnos necesitan conocer y acostumbrarse a los distintos significados de las fracciones, como son sus usos para expresar parte o partes de una cantidad o número, para comparar o expresar la razón entre dos cantidades y para expresar una división o cociente. Operar con estos significados para resolver problemas ayudará a que más tarde los alumnos comprendan mejor las operaciones con fracciones.

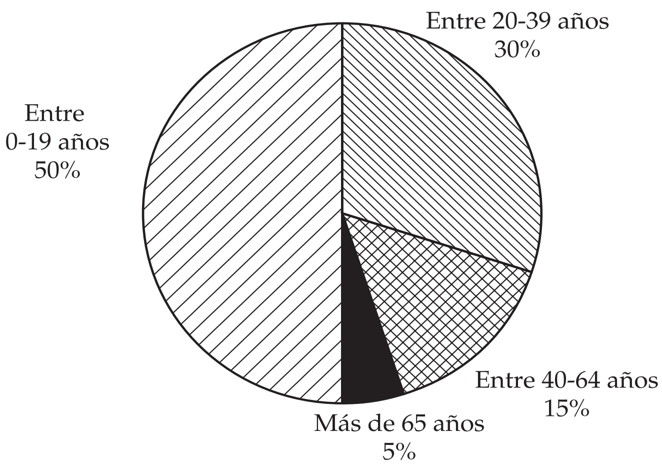
Por ejemplo

1. Tres amigos entran a un restaurante y piden dos pizzas que reparten entre ellos. ¿Cuánto le toca a cada uno? Poco después llega otro amigo. ¿Cuánto debe convidarle cada uno para que los cuatro tengan la misma cantidad de pizza?

2. Tres amigas, Rosario, María y Teresa, tienen ahorrados \$450, \$520 y \$730, respectivamente. Para irse de excursión, Rosario va a gastar cuatro quintos de lo que tiene ahorrado, María la mitad y Teresa los dos tercios. ¿Quién gastará más? ¿Cuánto gastará cada una?

3. Juan gana dos tercios de lo que percibe Pedro, quien gana cuatro quintos de lo que recibe Tadeo. Si Tadeo gana \$1 150, ¿cuánto perciben Juan y Pedro?

4. La gráfica de abajo muestra la distribución por edades de los habitantes de la República Mexicana, según el *Conteo de población y vivienda*, realizado por el INEGI en 1995. Si la población de nuestro país era de aproximadamente 91 000 000 de habitantes, ¿cuántas personas tienen entre 0 y 19 años?, ¿cuántas entre 20 y 39?, ¿entre 40 y 64?, ¿más de 65 años?



5. La Tierra tiene una superficie de alrededor de 510 000 000 km, de los cuales casi siete décimas partes están ocupadas por mares y océanos. El mayor océano es el Pacífico, que constituye un poco más de las nueve vigésimas partes de las aguas. El mayor continente es Asia, con casi las tres décimas partes del total de la tierra emergida. ¿Cuáles son, aproximadamente, las superficies de los mares y océanos y de la tierra emergida? ¿Del océano Pacífico? ¿De Asia?

6. Juan quiere comprarse camisas. En una tienda las camisas cuestan \$215, pero están en oferta al "2×1". En otra el precio es \$155 y están al "$2 \times 1^1/_2$". Finalmente, en una tercera tienda su valor es de \$160 y la oferta es al "3×2". ¿Dónde le conviene comprar?

Es muy importante que se comprendan las fracciones equivalentes, así como la expresión decimal de una fracción, como formas diferentes de expresar una misma cantidad o número y que, según convenga, para realizar una operación o resolver un problema, puede utilizarse una representación u otra equivalente.

Por ejemplo, si se quiere sumar:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

Conviene reducir las dos fracciones a un común denominador y realizar luego la suma:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

En cambio, si se quiere tener una buena idea del valor que representa la fracción:

$$\frac{45}{63}$$

Lo conveniente es simplificar:

$$\frac{\overset{\overset{5}{\cancel{15}}}{\cancel{45}}}{\underset{\underset{7}{\cancel{21}}}{\cancel{63}}} = \frac{5}{7}$$

o hacer la división:

$$\begin{array}{r|l} & 0.714... \\ \hline 63 & 450 \\ & 090 \\ & \;\;270 \\ & \;\;\;\;18... \end{array}$$

El tiempo que se dedique a la comprensión de la noción de fracciones equivalentes será recuperado con creces más adelante, cuando se estudien las operaciones y los criterios para comparar fracciones. Los alumnos deben desarrollar procedimientos para generar fracciones equivalentes a una dada; aprender a reducir fracciones a un común denominador para compararlas, sumarlas y restarlas; y a simplificar fracciones para tener una mejor idea de su valor. No hay razones que impidan que los alumnos dividan para conocer el valor de una fracción, o utilicen la expresión decimal de las fracciones para compararlas, etcétera.

Sin embargo, podría no ser recomendable exigir desde el principio que utilicen o dominen ciertos procedimientos, como son:

- El criterio de los productos cruzados para comparar fracciones o ver si son equivalentes.

- La búsqueda del mínimo común denominador y los procedimientos abreviados para sumar o restar fracciones:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}; \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

- La simplificación de los resultados de operar con fracciones.

- La adición de más de dos fracciones, o las operaciones combinadas.

- Las operaciones con fracciones mixtas.

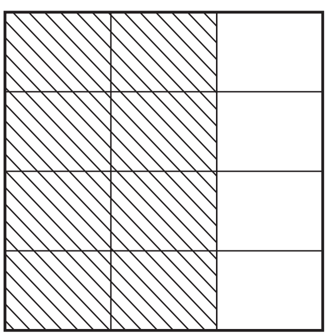
Estos temas podrán tratarse un poco después, cuando se hayan comprendido las nociones básicas.

El modelo de áreas

El uso del modelo de áreas, conocido a veces con el nombre de *modelo objetivo*, ayuda a visualizar y comprender las ideas relacionadas con la equivalencia, la comparación y el producto de fracciones.

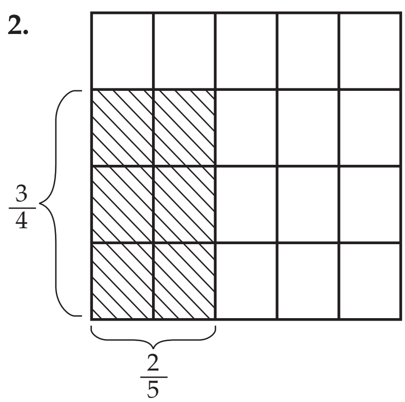
Por ejemplo

1.



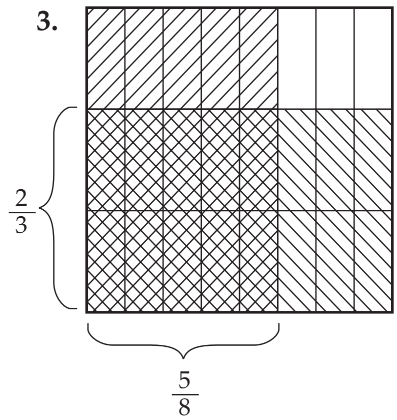
$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

2.



$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$$

3.

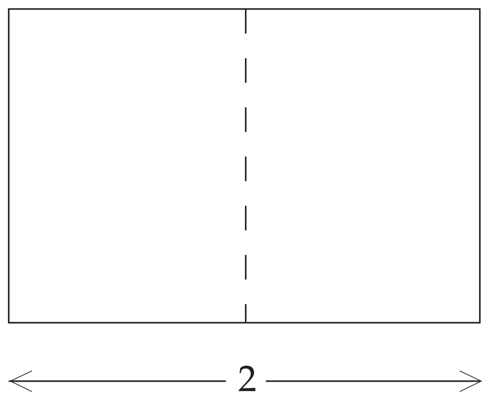


$$\frac{2}{3} > \frac{5}{8} \text{ porque } 2 \times 8 > 3 \times 5$$

Los alumnos también podrán utilizar este modelo para resolver problemas como los siguientes.

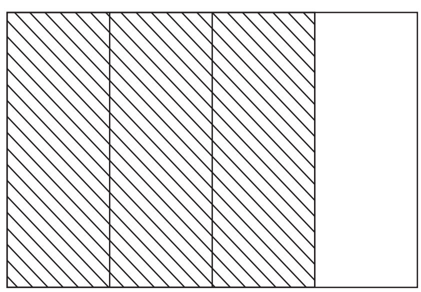
1. Una botella con capacidad de $1^1/_2$ litros está llena de leche en sus 4/5 partes. ¿Qué cantidad de leche contiene?

Están representados 2 litros



Capacidad de la botella $= 1\,^1/_2\, l$

$= 3/2\ l$

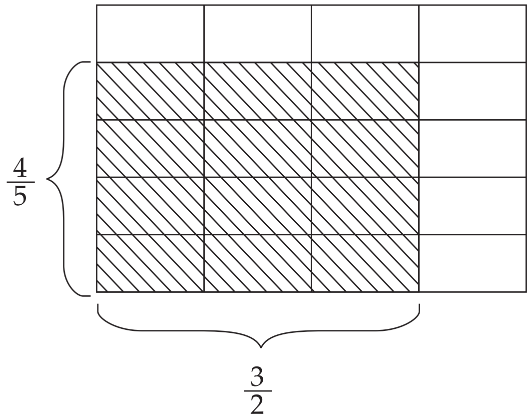


$$\frac{3}{2}$$

Las 4/5 partes de la capacidad de la botella son 12/10 *l*.

Obsérvese que:

$$\frac{12}{10} = \frac{4 \times 3}{5 \times 2} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$$



2. Un edificio de planta rectangular hace esquina con dos calles. Uno de sus frentes ocupa un tercio de una calle y el otro ocupa dos quintos de la otra. ¿Qué parte de la manzana está ocupada por el edificio?

3. Un pedazo de lámina rectangular mide 3/4 de metro de ancho y 5/6 de metro de largo. ¿Cuál es su superficie?

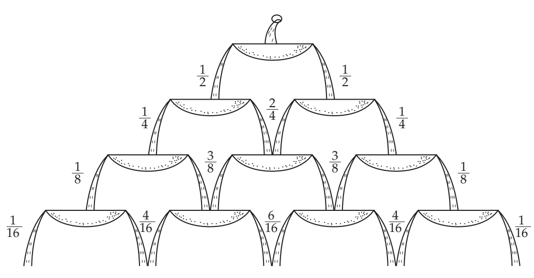
4. Las tres quintas partes de un terreno son cultivables y en el resto no se puede sembrar. De la parte cultivable, tres cuartos están dedicados al maíz y un cuarto a hortalizas. ¿Qué parte está dedicada al cultivo del maíz? ¿Qué parte a las hortalizas?

Los algoritmos

Una vez que los alumnos han aprendido y practicado la adición, sustracccción y comparación de fracciones reduciéndolas a un común denominador, y que han utilizado el modelo de áreas u otro para comparar, multiplicar y dividir fracciones, el profesor podrá presentarles los algoritmos usuales y plantear actividades para que los alumnos los practiquen.

Por ejemplo

1. ¿Cómo se distribuye el agua en una fuente romana de 5 niveles si 1/3 de lo que llega a cada tazón se va a la izquierda y los 2/3 restantes se van a la derecha?



La fuente romana. En el tazón superior de la fuente el agua llega a razón de 1 *l* por segundo. En los dos lados izquierdo y derecho del tazón el agua fluye simétricamente a razón de 1/2 *l* por segundo en cada lado y cae dentro de dos tazones situados en el nivel inferior. El agua de estos dos tazones también fluye y cae dentro de tres tazones situados simétricamente en el siguiente nivel; el tazón del centro recibe 1/4 + 1/4 = 1/2 *l* de agua por segundo, mientras que los tazones de los lados sólo reciben 1/4 *l* por segundo. El proceso se repite en forma similar para los siguientes niveles de la fuente.

2. Realiza las siguientes adiciones:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} =, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} =, \ldots$$

y así sucesivamente. ¿Qué observas? ¿A qué valor se aproxima la suma al aumentar el número de sumandos? (*Sugerencia*: representa cada suma en la recta numérica o expresa en forma decimal los resultados que se obtienen.)

3. Los antiguos egipcios utilizaban las fracciones unitarias, es decir, las fracciones cuyo numerador es 1, salvo que también utilizaban la fracción $^2/_3$. Se sabe que cada fracción unitaria puede escribirse como la suma de varias fracciones unitarias diferentes entre sí. ¿De qué manera escribirías las siguientes fracciones unitarias como la suma de varias fracciones unitarias distintas (por ejemplo, no se vale escribir $^1/_2 = {}^1/_4 + {}^1/_4$)?

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7} \text{ y } \frac{1}{17}$$

4. El número 1 puede escribirse de muchas formas como la suma de fracciones unitarias diferentes, por ejemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}, \ldots$$

Verifica que las sumas anteriores tienen como resultado 1. Si las examinas verás que en todas ellas hay algún(os) sumando(s) con denominador par. Para que veas que esto no ocurre en general, verifica que la siguiente suma es igual a 1:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{105}+\frac{1}{135}$$

En resumen

El aprendizaje de las fracciones presenta dificultades que los alumnos tardan en dominar. Ellos no sólo deberán acostumbrarse a sus usos en diferentes contextos y a las diferentes representaciones de un mismo número fraccionario, sino también a nuevos significados y formas de operar. Muchos no alcanzan a comprender por qué si al multiplicar fracciones se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador, no se procede en forma similar cuando se suma; o por qué, para citar otro ejemplo, un problema que se resuelve dividiendo entre tres se plantea como una multiplicación por un tercio. El profesor deberá diseñar actividades que ayuden a resolver dudas como las anteriores y permitan comprender las diferencias de significados y formas de operar que hay entre los naturales y las fracciones. También debe dar la oportunidad de que se utilicen con frecuencia las nociones y procedimientos aprendidos y estar preparado para, cada vez que sea necesario, recordar brevemente aquello que los alumnos hayan olvidado.

Razonamiento proporcional

El razonamiento proporcional en las matemáticas

La noción de razón surge al comparar dos números o magnitudes a través de su cociente, mientras que las proporciones resultan de comparar los valores de dos listas de números o cantidades variables para ver si guardan siempre la misma razón entre sí. Si llamamos a y b a dos cantidades, su razón está dada por el cociente:

$$\frac{a}{b}$$

Y si denotamos por x los valores que puede tomar una cantidad variable y por y los valores correspondientes de la otra, decir que x e y son proporcionales significa que las dos cantidades están relacionadas por una expresión como la siguiente:

$$\frac{y}{x} = k \text{ donde } k \text{ es constante}$$

o lo que es lo mismo:

$$y = kx$$

k es llamada la *constante o factor de proporcionalidad.*

A pesar del aspecto tan sencillo de las fórmulas anteriores, las nociones de proporcionalidad y sus consecuencias son centrales en todas las matemáticas. En los ejemplos que vienen a continuación se ilustrará brevemente el papel que juegan en campos como la medición, la presentación y tratamiento de la información, el estudio de la variación y la geometría.

Las razones y el esquema derivado de medición

El *esquema fundamental de medición* consiste en comparar una magnitud con una unidad de la misma especie, para ver cuántas veces cabe la segunda en la primera. De esta manera se miden ciertas cantidades físicas y geométricas, como son longitudes, áreas, volúmenes, masas y otras.

Pero hay magnitudes que no se miden siguiendo este esquema. Por ejemplo, la velocidad se mide por la razón entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrerlo. La densidad de una sustancia es la masa por unidad de volumen. La probabilidad teórica de un evento resulta de comparar los casos favorables al evento con el total de casos posibles. Cuando una cantidad se mide por medio de la razón entre dos cantidades, se está utilizando el llamado *esquema de medición derivado.*

Este esquema de medición es muy importante en nuestros días, cuando además de magnitudes físicas y geométricas, interesa medir las características y comportamientos de ciertos procesos o poblaciones. Así, se mide la eficiencia de un proceso por medio de la razón entre los resultados obtenidos y el trabajo y los recursos invertidos para obtenerlos. La noción de tasa o crecimiento relativo es particularmente útil para estudiar y entender la evolución y desarrollo de situaciones como la inflación (o aumento en el costo de la vida) y el crecimiento de poblaciones, por ejemplo. En general, la noción de razón o cantidad relativa se encuentra, en una u otra forma, detrás de la mayoría de los índices o indicadores que se utilizan hoy en día para medir o describir la magnitud de numerosos fenómenos.

Las razones y el tratamiento de la información

En la presentación de la información se recurre con frecuencia al uso de porcentajes. La función de los porcentajes es facilitar la lectura de datos y resultados numéricos. Esto se consigue de dos maneras:

- Por un lado, refiriendo los datos a una base común, lo que facilita la comparación de resultados provenientes de diferentes bases, como suele ocurrir en la mayoría de los casos.

- Por otro lado, reduciendo los resultados a números que, por lo general, se encuentran entre 1 y 100, lo que esclarece las relaciones que guardan entre sí al ponerlos dentro del dominio de los números pequeños, fáciles de multiplicar y dividir mentalmente.

Como ilustración, la siguiente tabla muestra los datos de extensión territorial y población (1998) para los seis países de América Central.

País	Extensión territorial (km^2)	%	Población (1998) (miles de habs.)	%
Costa Rica	51 000	10.2	3 600	10.6
El Salvador	21 041	4.2	5 900	17.4
Guatemala	108 889	21.9	11 280	33.1
Honduras	112 088	22.5	6 000	17.75
Nicaragua	130 700	26.1	4 400	13.0
Panamá	75 517	15.1	2 700	7.9
Total	499 235	100.0	33 800	100.1*

* El resultado de la suma no es exactamente 100% debido al redondeo de las cifras. Fuente: *Almanaque Mundial 1998.*

En la tabla las columnas de porcentajes permiten observar con facilidad las magnitudes relativas de los datos y darse cuenta del desequilibrio que existe entre la distribución territorial y por habitantes en estos países.

Cuando el uso de porcentajes conduce a números difíciles de leer y comprender, decimales muy pequeños por ejemplo, se prefiere cambiar la base y utilizar tantos por mil, por cien mil, partes por millón, etcétera. Por lo general, en la presentación de la información es usual que datos y resultados numéricos se presenten referidos a una base común, por lo que además de los ejemplos ya citados, es frecuente encontrar otros como son calorías/100 g, mg/100 g, etcétera.

La proporcionalidad y el estudio de la variación

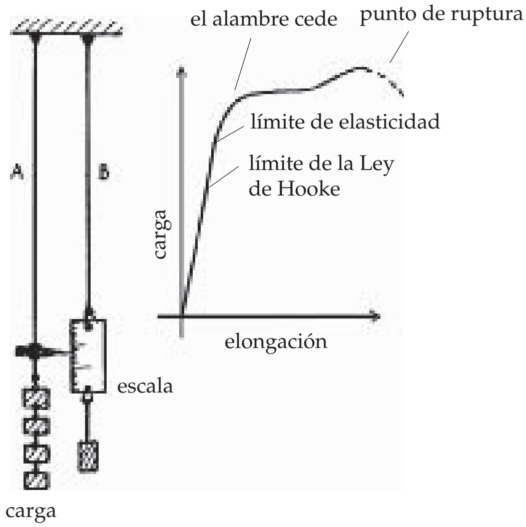
En la vida cotidiana, pero también al estudiar diversos fenómenos que interesan a las ciencias, a la ingeniería y a las diversas disciplinas, se encuentran con frecuencia cantidades que varían proporcionalmente.

Así, lo que pagamos al comprar varios artículos iguales es, si no hay descuento, proporcional al número de artículos; la cantidad de un ingrediente es proporcional a la cantidad de mezcla que queremos preparar. Por ejemplo, si se tiene una receta para preparar cuatro raciones de un guiso, multiplicando por 1.5 la cantidad de cada ingrediente se obtiene la misma receta para seis raciones.

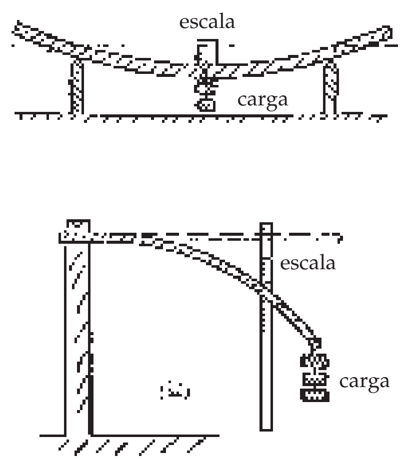
La física y la ingeniería son ricas en situaciones donde aparece la variación proporcional. La velocidad que adquiere un cuerpo que cae bajo los efectos de la gravitación es, si se desprecia la resistencia del aire, proporcional al tiempo de caída. Si se aplica una fuerza a un resorte o a un alambre, la elongación que resulta es, dentro de ciertos rangos, proporcional a la fuerza aplicada; principio que se utiliza para construir pesas y

Ley de Hooke

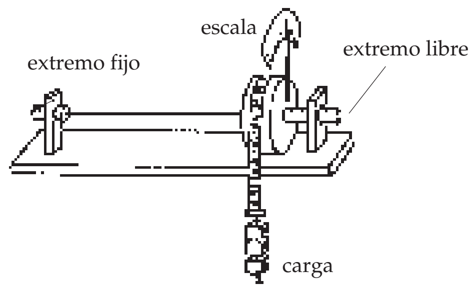
Elongación de un alambre



Deformación de una viga



Torsión de una varilla o alambre



básculas. Algo similar ocurre con las deformaciones que se observan cuando se intenta torcer una varilla, o cuando se carga una viga en su centro o en un extremo libre. Si se somete un cuerpo a un cambio de temperatura, sus dimensiones lineales se modifican y, también dentro de ciertos rangos de temperatura que dependen de la sustancia del cuerpo, esta modificación es proporcional al cambio de temperatura, propiedad que se utiliza en la construcción de termómetros, etcétera.

Para investigar si dos cantidades x e y se relacionan de esta forma, se construye una tabla de valores y se ve si el cociente y/x toma siempre el mismo valor o valores muy próximos entre sí. También se puede construir una gráfica para ver si se obtiene una recta que pasa por el origen.

Ocurre con frecuencia que dos cantidades x e y no son proporcionales, pero sí lo son sus incrementos. En estos casos se tiene la relación:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

donde $x - x_o$ y $y - y_o$ denotan los incrementos de x e y respecto a x_o y y_o respectivamente. Esta relación define las *funciones lineales,* cuya gráfica es una recta en el plano cartesiano.

Por ejemplo, para expresar que la dilatación de un alambre es proporcional al cambio de temperatura al que se le somete, escribimos:

$$\ell - \ell_0 = k(T - T_0)$$

donde $T - T_o$ denota el cambio o incremento en la temperatura, $l - l_o$ la dilatación o cambio en la longitud del alambre y k es la constante de proporcionalidad. De esta expresión se obtiene la función lineal:

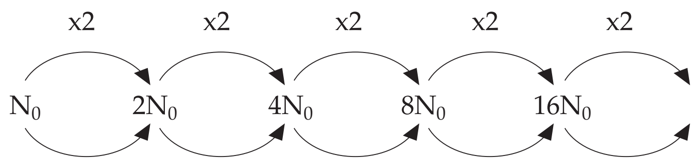
$$\ell = \ell_0 + k\,(T - T_0)$$

En muchas situaciones interesantes el incremento relativo o tasa de crecimiento de una variable es proporcional al incremento de la otra y se tiene:

$$\frac{y - y_0}{y} = k(x\text{-}x_0)$$

Esta relación define las *funciones exponenciales* y *logarítmicas* que, después o junto con las funciones lineales, constituyen la familia de funciones más importantes de las matemáticas.

Para ver un ejemplo, consideremos el caso de un cultivo de laboratorio en el que se duplica el número de bacterias cada 25 horas en promedio. Si llamamos N_0 al número de bacterias al inicio, la situación al cabo de 1, 2, 3, ... periodos de 25 horas está representada en el siguiente diagrama:



Incremento	$+N_0$	$+2N_0$	$+4N_0$	$+8N_0$	$+16N_0$
Incremento relativo (tasa de crecimiento)	1	1	1	1	1

Finalmente, en muchas situaciones la relación entre dos cantidades no es ni lineal ni exponencial, pero se puede suponer que para valores pequeños de los incrementos, el incremento de y es proporcional al incremento de x. En este caso también se tiene:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

donde el valor de la constante de proporcionalidad k depende por lo general de x_0. Esta consideración permite desarrollar técnicas de interpolación y aproximación de gran utilidad.

Por ejemplo, supóngase que se quiere calcular $\sqrt{115}$. Observemos primero que $\sqrt{115}$ está entre $10 = \sqrt{100}$ y $11 = \sqrt{121}$ y que al pasar de $\sqrt{100} = 10$ a $\sqrt{121} = 11$, el radicando se incrementa en 21 y la raíz en 1. Entonces la pre-gunta es: ¿En cuánto se incrementará la raíz si el radicando sólo se incrementa en 15? Para obtener aproximadamente este valor se realiza la regla de tres:

$$\begin{array}{ll} 21 & \to 1 \\ 15 & \to x \end{array}$$

$$x = \frac{15}{21} = 0.714\ldots$$

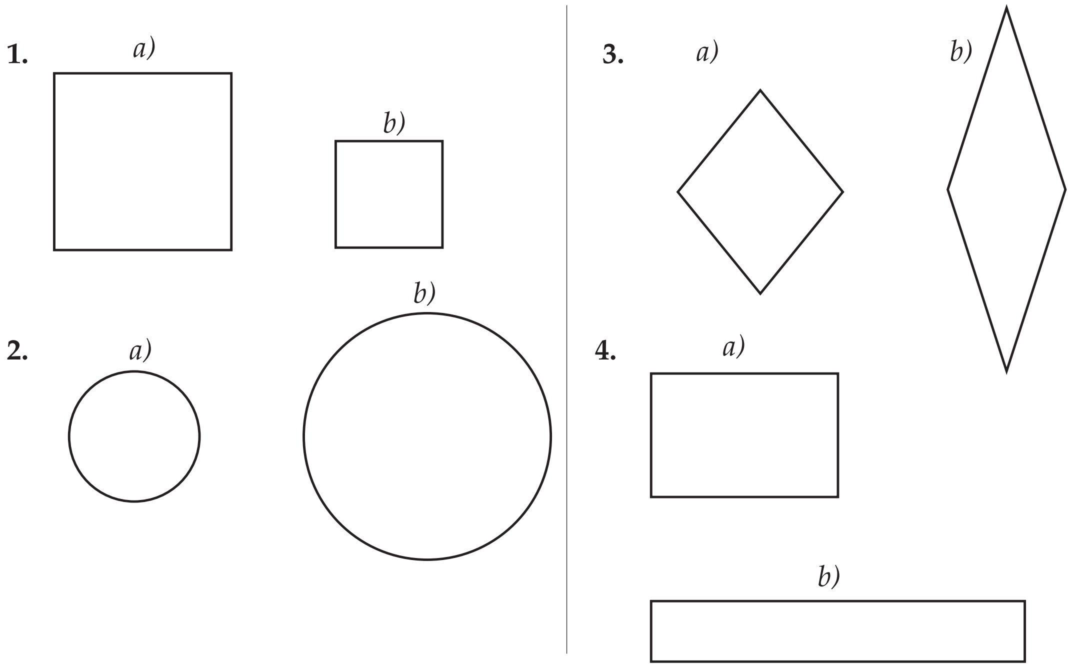
de donde se obtiene:

$$\sqrt{115} = 10 + 0.714... = 10.714...$$

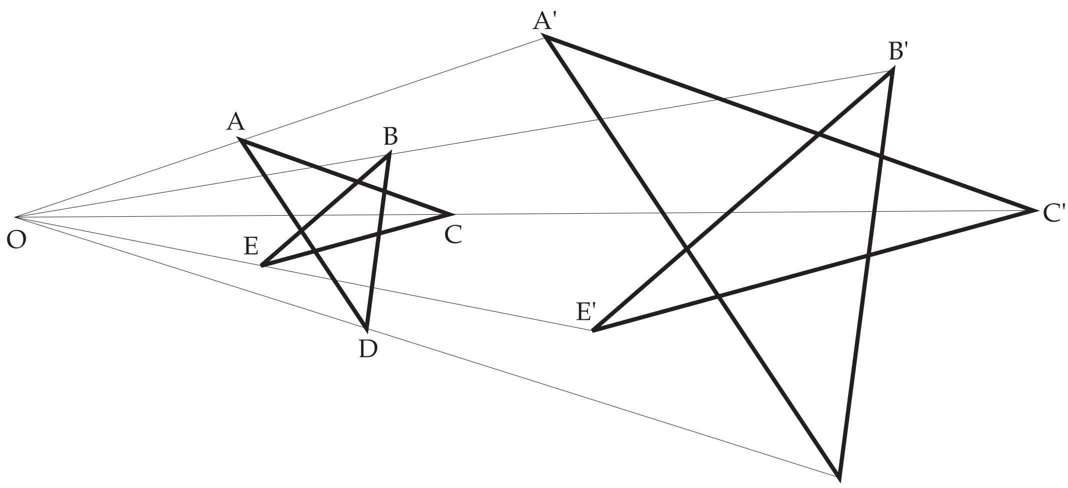
que como puede verse no está lejos de la raíz buscada (el valor exacto es $\sqrt{115} = 10.723...$).

Proporcionalidad y semejanza de figuras

Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma, aunque no necesariamente el mismo tamaño. Por ejemplo, dos cuadrados siempre son semejantes, y lo mismo pasa con dos círculos. En cambio dos rombos o dos rectángulos pueden no ser semejantes.



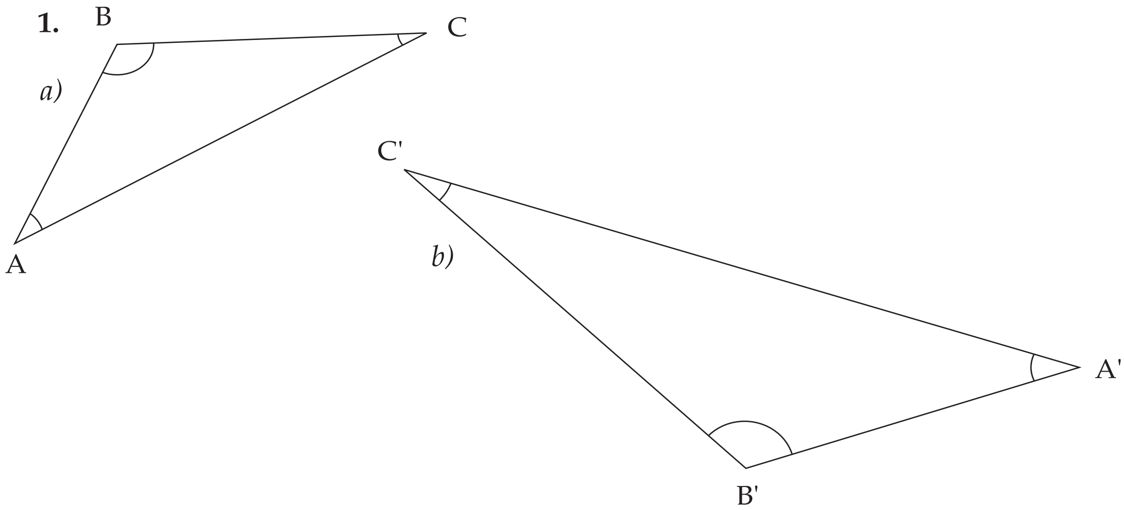
Las siguientes estrellas también son semejantes entre sí.



La posición de dos figuras puede favorecer o desfavorecer el darse cuenta a simple vista de la semejanza de dos figuras, pero es posible desarrollar criterios más precisos de semejanza que la pura inspección visual. Por ejemplo.

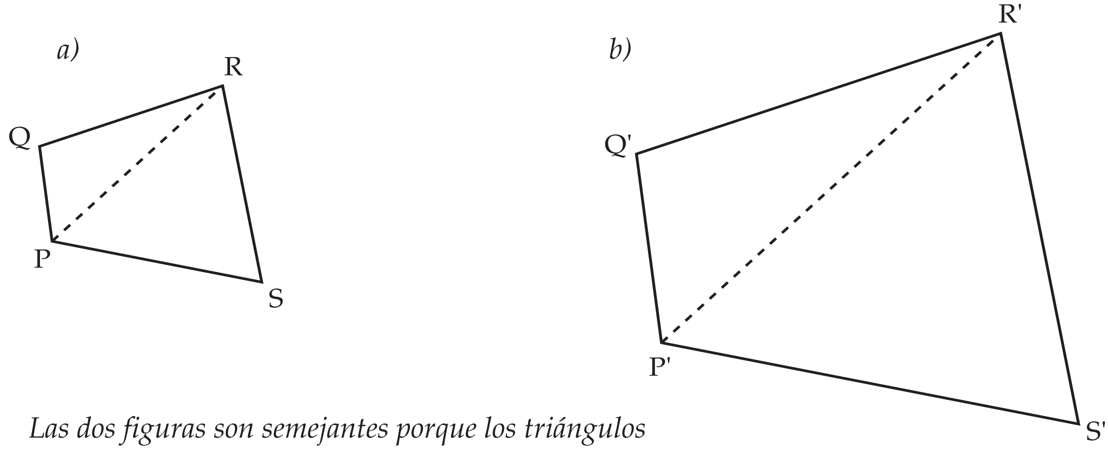
¿Son semejantes los triángulos siguientes?

1.



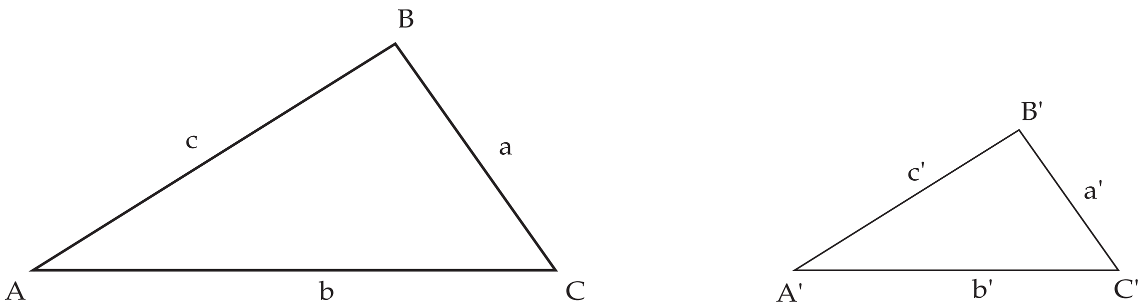
En el caso de triángulos es fácil dar un criterio de semejanza: *dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales*. Así, los triángulos anteriores son semejantes, como puede verificarse al medir los ángulos con el transportador. Sin embargo, este criterio no funciona cuando se trata de figuras de más lados. Por ejemplo, dos rectángulos no siempre son semejantes a pesar de que tienen sus cuatro ángulos iguales. Si se quiere utilizar el criterio de semejanza de triángulos para investigar la semejanza de otras figuras, lo que se debe hacer es triangularlas convenientemente y ver si los triángulos que se forman en una figura son semejantes a los correspondientes que se forman en la otra.

2. ¿ Son semejantes las siguientes figuras?



Las dos figuras son semejantes porque los triángulos correspondientes que se forman son semejantes.

La semejanza no sólo tiene que ver con los ángulos que se forman en las figuras, sino también con las relaciones que guardan entre sí sus dimensiones. Uno de los teoremas más importantes de la geometría afirma que si dos figuras son semejantes, entonces cada una es una reproducción a escala de la otra o, dicho en otros términos, las dos figuras son proporcionales. Para ser más precisos, considérense los siguientes triángulos semejantes



En estos triángulos los lados correspondientes son proporcionales, esto es, guardan siempre la misma razón entre sí:

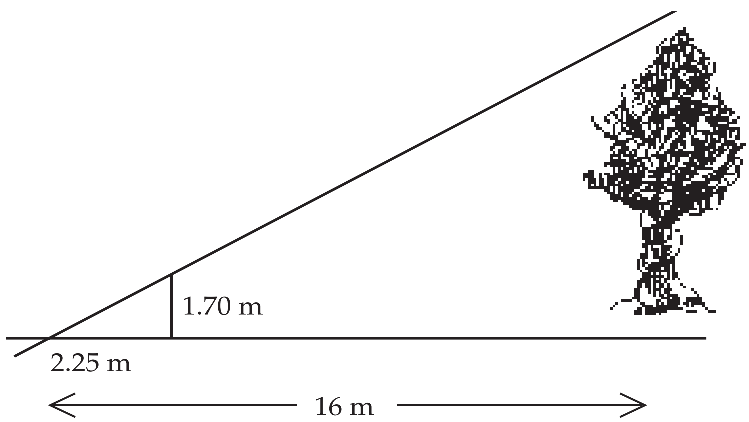
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

TEOREMA

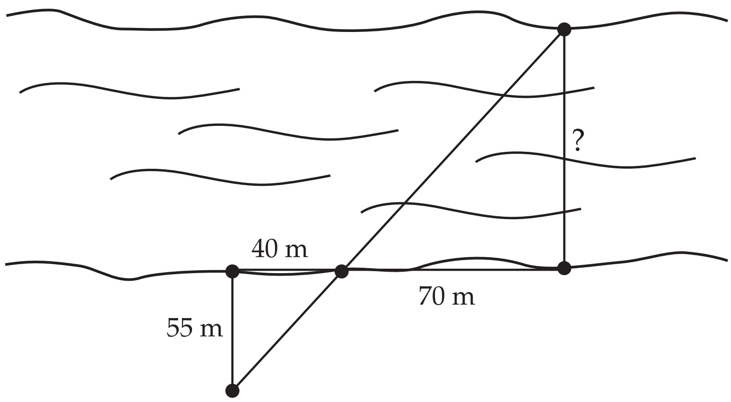
Si dos triángulos son semejantes, entonces son proporcionales. Recíprocamente, si dos triángulos son proporcionales, entonces son semejantes.

El teorema anterior es rico en consecuencias y resulta muy útil en la resolución de numerosos problemas. Por ejemplo, a continuación aparecen dos de sus aplicaciones más sencillas al cálculo de distancias inaccesibles.

1. ¿Cuál es la altura del pino?



2. ¿Cuál es el ancho del río?



La idea de semejanza de figuras se encuentra también detrás del número π y la fórmula que se utiliza para calcular la longitud de la circunferencia. En efecto, como dos círculos siempre son semejantes, se deduce que la razón entre la circunferencia y el diámetro —es decir, el número de veces que el diámetro cabe en la circunferencia— es la misma para todos los círculos. Si llamamos p a este número, C a la longitud de la circunferencia y d a la longitud del diámetro, tenemos:

$$\frac{C}{d} = \pi$$

Despejando se obtiene la fórmula para calcular la longitud de la circunferencia:

$$C = \pi\, d$$

Para continuar, considérese la siguiente figura y llámese:

a = BC, a' = B'C', a'' = B''C'',...

b = AC, b' = AC', b'' = AC'',...

c = AB, c' = AB', c'' = AB'',...

Como los triángulos ABC, AB'C', AB''C'', ... son semejantes, se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = k,$$

con k = constante

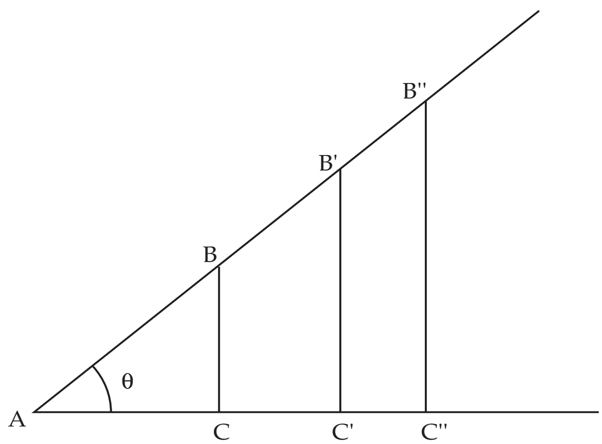


Figura A

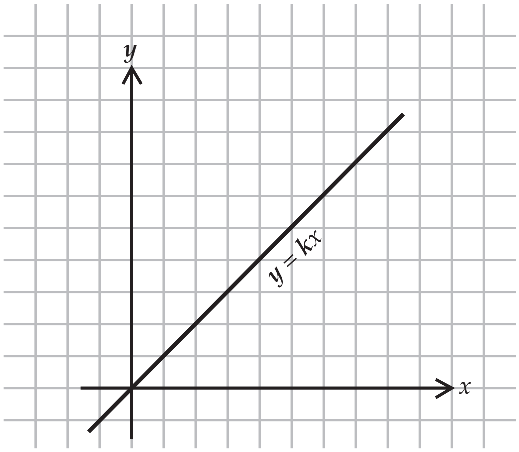
Ahora, si se denota por x cualquiera de los valores b, b′, b″,... y por y el valor correspondiente en la lista a, a′, a″... se tiene:

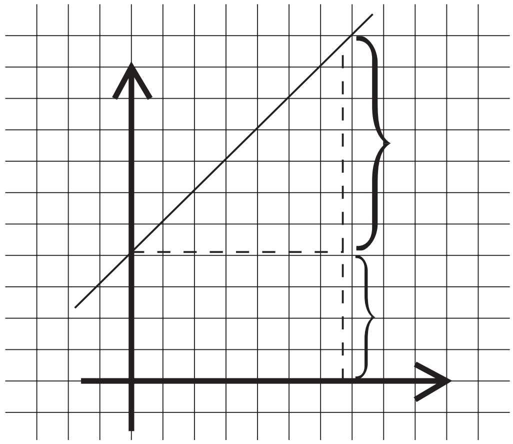
$$\frac{y}{x} = k$$

Esto es:

$$y = kx$$

que es la ecuación de una recta que pasa por el origen. De donde se puede obtener con facilidad la ecuación de cualquier recta, aunque no pase por el origen:





Regresemos a la figura A y consideremos las razones:

$$\frac{a}{c}\ \frac{a'}{c'}\ \frac{a''}{c''},...$$

Nuevamente, debido a la semejanza de los triángulos las razones anteriores son iguales. Esto significa que su valor sólo depende del ángulo θ y no de la longitud de los lados BC, B'C', B''C'',... y AB, AB', AB'',... Esto permite definir la función:

$$\text{seno } \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

En forma similar se definen las otras funciones trigonométricas coseno θ y tangente θ que, junto con la función seno θ, constituyen el fundamento de toda la trigonometría.

Las situaciones anteriores no agotan el tema de proporcionalidad, pero son suficientes para ilustrar la importancia de esta noción en los diferentes campos de las matemáticas. La proporcionalidad no debe ser vista como un tema más del programa, sino como el acceso a una forma de razonamiento que se logra gradualmente a lo largo de toda la educación básica, por medio de actividades adaptadas al grado de madurez de los alumnos.

Problemas y aplicaciones

Los alumnos requieren de tiempo y deben enfrentar diversos problemas y actividades para desarrollar y comprender la noción de razón; primero como una relación parte-todo y, más tarde, como una relación entre dos cantidades. Asimismo necesitan acostumbrarse a la expresión de una razón por medio de una fracción o cociente, de un porcentaje o de un decimal. Es necesario que se planteen actividades y problemas para que conozcan los usos y aplicaciones de las razones en la vida cotidiana, en la medición y en otros contextos. En particular, hay que plantear problemas que impliquen el uso de porcentajes, tantos por millar y otro tipo de razones en la presentación y tratamiento de la información.

La noción de proporcionalidad podrá introducirse por medio de problemas que lleven a comparar dos listas de valores para ver si es posible transformar los valores de una lista en los de la otra, multiplicando o dividiendo siempre por el mismo número. Actividades como ésta y otras similares ayudarán a comprender la constante o factor de proporcionalidad y facilitarán que más adelante se pueda establecer, en algunos casos sencillos, la expresión algebraica que relaciona dos cantidades.

Es importante que los alumnos conozcan que al representar gráficamente los valores de dos cantidades que varían proporcionalmente, se obtiene una recta que pasa por el origen, y utilicen este hecho como un criterio de proporcionalidad entre cantidades.

Problemas como los de las siguientes páginas podrán servir para introducir las ideas anteriores.

1. Considera las siguientes tablas:

x	3	1	4	7
y	9	1	16	49

x	3	1	4	7
y	6	2	8	14

x	3	1	4	7
y	6	4	7	10

x	3	1	4	7
y	9	5	11	17

x	3	1	4	7
y	9	3	12	21

x	3	1	4	7
y	6	0	9	18

En cada tabla los números del segundo renglón se obtuvieron mediante la transformación del primero, siguiendo una de las maneras que a continuación se presentan en desorden:

a) $y = 2x$ *b)* $y = x + 3$ *c)* $y = 3x$

d) $y = 3x - 3$ *e)* $y = 2x + 3$ *f)* $y = x^2$

Localiza las transformaciones que corresponden a cada tabla. ¿En qué casos hay proporcionalidad entre el primero y el segundo renglón de la tabla?

2. Completa las siguientes tablas de manera que haya proporcionalidad entre el primero y el segundo renglón. Escribe en cada caso la forma como están relacionados los números del primero y segundo renglón.

a)

x	3	5	11	18	21	26
y	15		55		105	

$y =$

b)

x	4	12	20	32	48	100
y		9		24		

$y =$

c)

x	7	12	15	28	30	40
y		7.2		16.8		

$y =$

d)

x		11	17		27	
y	40		85	100	135	175

$y =$

e)

x		5.3		8.1	10.6	
y	2.72		5.6	6.48		10.4

$y =$

3. Al suspender un peso de un resorte, éste se elonga, es decir, aumenta su longitud. Para estudiar este fenómeno se suspendieron varios pesos de un resorte cuya longitud original era de 150 mm y se midió la longitud que adquiría al suspender cada peso. Los datos obtenidos están dados en la siguiente tabla.

PESO SUSPENDIDO (EN G)	1000	2000	3000	4000	5000	6000
LONGITUD OBSERVADA (EN MM)	168	186	204	222	240	258
ELONGACIÓN (EN MM)	18	36	54	72	90	108

Tabla 1

Para saber si hay proporcionalidad entre los pesos suspendidos y las longitudes y elongaciones observadas, se construyen dos tablas como las siguientes, donde P representa el peso suspendido, L la longitud observada y E la elongación.

P	L	L/P*
1000	168	0.168
2000	186	0.093
3000	204	0.068
4000	222	0.056
5000	240	0.048
6000	258	0.043

Tabla 2

P	E	E/P
1000	18	0.018
2000	36	0.018
3000	54	0.018
4000	72	0.018
5000	90	0.018
6000	108	0.018

Tabla 3

* Cifras redondeadas.

Vemos que al dividir la longitud entre el peso suspendido no se obtiene siempre el mismo valor, lo que quiere decir que estas dos cantidades no son proporcionales. En cambio, la elongación y el peso suspendido sí son proporcionales:

$$E = 0.018 \times P$$

Construye una gráfica para representar la relación entre: *a)* el peso suspendido y la longitud observada; y *b)* el peso suspendido y la elongación. ¿Qué observas? ¿Cómo son las rectas que dibujaste? □

4. Cuando viajamos en automóvil y se nos atraviesa algún obstáculo, frenamos para que el auto se detenga. Entre el momento en que vemos el obstáculo y oprimimos el pedal del freno, el auto recorre una cierta distancia, llamada *distancia de reacción*. Entre el momento en que aplicamos el freno y aquel en que el auto se detiene, éste recorre otra distancia, llamada *distancia de frenado del vehículo*. ¿Hay proporcionalidad entre la velocidad del vehículo y la distancia de reacción? ¿Entre la velocidad y la distancia de frenado del vehículo? ¿Entre la velocidad y la distancia total de frenado?

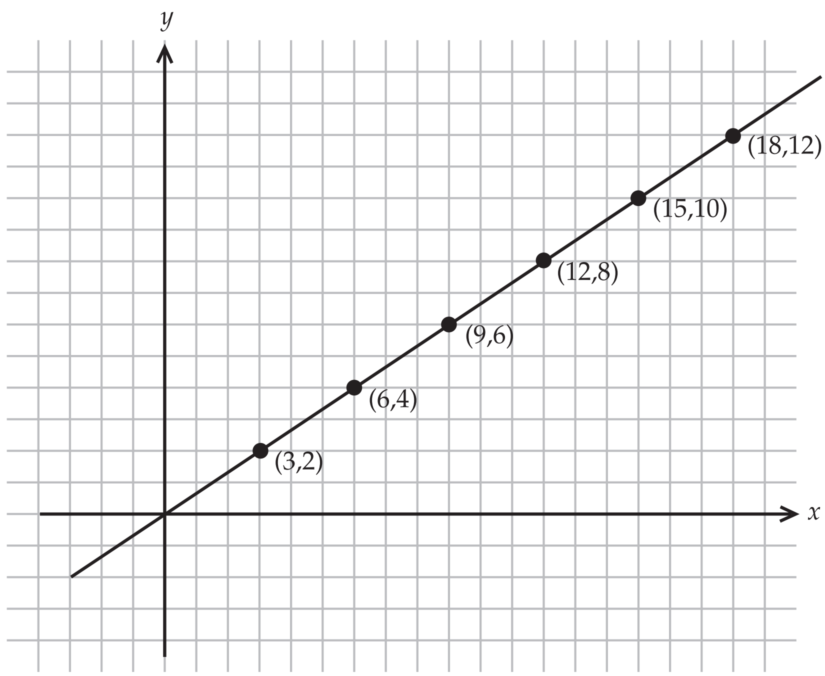
Distancia de frenado de un automóvil

Velocidad (km/h)	Distancia de reacción (m)	Distancia de frenado del vehículo (m)	Distancia total de frenado (m)
40	8	10.6	18.6
50	10	16.5	26.5
60	12	23.7	35.7
70	14	32.0	46.0
80	16	41.7	57.7
90	18	52.7	70.7
110	22	79.0	101.0
130	26	109.6	135.6

Tabla 1

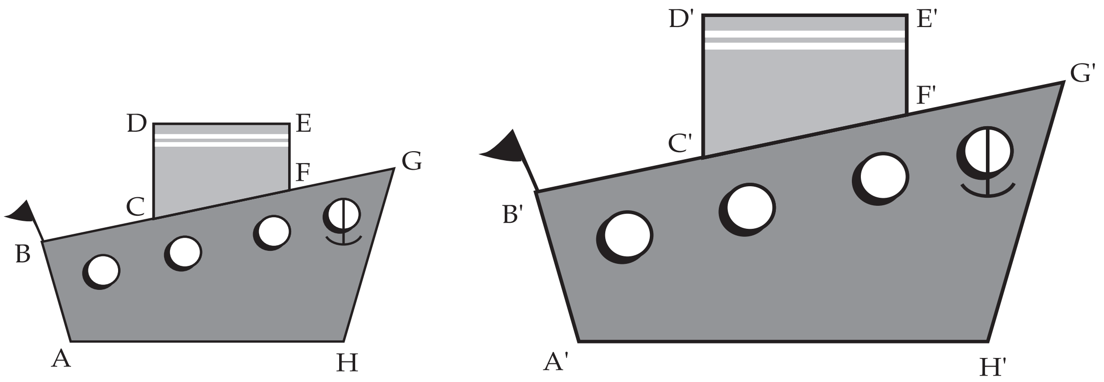
5. A partir de los datos de la tabla 1, ¿cómo se calcularía, *grosso modo*, la distancia total de frenado en la ciudad (velocidades entre 40 km/h y 60 km/h) y en una autopista rápida (velocidades superiores a 100 km/h)? □

6. Se ha dibujado una recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas. También se han indicado algunos puntos con sus respectivas coordenadas. ¿Hay proporcionalidad entre la primera y la segunda coordenada de los puntos señalados? Investiga lo que pasa con otros puntos.



7. En un sistema de coordenadas traza otras rectas que pasen por el origen y repite lo que hiciste en el problema anterior; comenta con tu profesor y compañeros. Investiga lo que ocurre para las rectas que no pasan por el origen de coordenadas.

8. Considera las siguientes figuras:



Elabora una tabla en la que aparezcan:

a) En el primer renglón, las longitudes de los segmentos AB, BC, CD, ..., HA.

b) En el segundo, las longitudes de los segmentos A'B', B'C', ..., H'A'

¿Hay proporcionalidad entre los dos renglones de la tabla? ¿Por qué se dice que la segunda figura es una reproducción a escala de la primera?

Otras aplicaciones

Una vez que se conoce que dos cantidades varían proporcionalmente, se podrán utilizar esquemas como el siguiente para resolver problemas de variación proporcional directa.

$\times \frac{b}{a}$

a	c
b	?

$\times \frac{b}{a}$

Por ejemplo

1. Si un vehículo recorre 275 km con 23.5 *l* de gasolina, ¿cuántos kilómetros recorrerá con 45 *l*?

l	23.5	45
km	275	?

$\times \boxed{}$

Problemas sencillos que conduzcan a un reparto proporcional o lleven a comparar razones servirán para que los alumnos se acostumbren gradualmente a este tipo de situaciones.

2. Tres amigos obtienen un premio de $1 000 en una rifa. ¿Cómo deben repartírselo si para comprar el boleto que resultó ganador uno dio $12, el otro $8 y el tercero $5?

3. En una asamblea para elegir 12 representantes, la planilla A obtuvo 522 votos, la B 174 y la C 348. ¿Cuántos representantes le corresponden a cada planilla?

4. Yo tengo naranjas y Pedro y Pablo tienen manzanas. Por cada cinco naranjas Pedro me da tres manzanas, y por cada ocho naranjas Pablo me da cinco manzanas. ¿Con quién hago trato?

5. Hay dos juegos con las mismas oportunidades de ganar: en uno me dan $3 por cada $2 de apuesta y en el otro me dan $7 por cada $5. ¿Cuál me conviene?

6. El precio de la lata de atún "Del Mar" es $ 5.50 y contiene 175 g drenados, mientras que la lata de la marca "Super Atún" cuesta $ 5.10 y el peso drenado es de 150 g. ¿Cuál me conviene comprar?

7. En una prueba de mecanografía, una secretaria cometió 17 errores en seis páginas y otra cometió 22 en ocho páginas. ¿Cuál de las dos es más eficiente? □

Conviene que los alumnos se acostumbren gradualmente a los giros que se utilizan en el lenguaje común para expresar la proporcionalidad entre dos cantidades. Por ejemplo:

El costo es de $37.50 por docena.

El rendimiento anual es de $9.60 por cada $100 invertidos.

Este automóvil consume 8.7 l cada 100 km.

Más adelante, durante el estudio de las funciones, los alumnos deberán acostumbrarse también al uso y significado de expresiones como las siguientes:

***z** es proporcional al producto de **x** por **y**.*

***d** es proporcional al cuadrado de **t**.*

***P** es directamente proporcional a **T** e inversamente proporcional a **V**.*

Finalmente, es importante tener en cuenta los diferentes grados de dificultad involucrados en el manejo de razones y proporciones, de tal manera que el profesor pueda seleccionar las actividades más favorables para el estudio y decidir el mejor momento para plantearlas. Por ejemplo, los alumnos aprenden pronto a responder preguntas del tipo: ¿Cuánto es un tercio de 225? Pero les toma más tiempo enfrentar con éxito preguntas como: ¿Qué parte o fracción representa 75 de 225?

Porcentajes

En particular, al estudiar los porcentajes se deberá distinguir entre los tres casos siguientes:

- *La aplicación de un por ciento* o cálculo de un porcentaje

Por ejemplo:

1. Obtener 10%, 15%, o 25%... de una cantidad dada.

- *La determinación de un por ciento*, es decir, qué porcentaje representa una cantidad de otra.

Por ejemplo:

2. ¿Qué porcentaje representa 240 de 380?

- *La determinación de la base* cuando se conoce el porcentaje que representa una cantidad de otra.

Por ejemplo

3. Si 35% de una cantidad es 175, ¿cuál es la cantidad?

Los programas recomiendan que durante el primer grado de la educación secundaria, el estudio de los porcentajes se concentre sobre todo en la resolución de problemas que conduzcan a la aplicación de porcentajes, dejando para los grados posteriores el estudio de las situaciones y problemas que involucran a los otros casos, cuyo nivel de dificultad es mayor.

Los alumnos podrán utilizar la calculadora para obtener porcentajes. Sin embargo, no conviene que se limiten a utilizar la tecla $\boxed{\%}$, sino que también aprendan que aplicar un porcentaje de 10%, 15%, 25%,... por ejemplo, es lo mismo que multiplicar por 0.10, 0.15, 0.25,...; que para calcular un aumento o un descuento de 10%, 15%, 25%,... se multiplica por 1.10, 1.15, 1.25,... cuando se trata de un aumento y por 0.90, 0.85, 0.75,... si se trata de un descuento.

Por ejemplo

1. Un pequeño fabricante de suéteres los vende a $175 cada uno, pero ofrece un descuento de 10% si le compran más de seis y de 15% si le compran por docena.

Para no confundirse el fabricante elabora una tabla como la siguiente, que a ti te toca llenar.

Cantidad	Precio	Descuento	Precio neto
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
1 docena			
2 docenas			
3 docenas			
4 docenas			
5 docenas			

2. En una caja de ahorros ofrecen 16% de intereses si la inversión es a un año y 1.2% si la inversión es a un mes. Si una persona tiene $1 000.00 y los quiere mantener un año en la caja para obtener la mayor ganancia ¿qué plan de inversión le conviene más?

3. Una comerciante compra zapatos de $ 190.00, pero le descuentan 20% en la fábrica. Si ella los vende con una ganancia de 25% sobre el precio de fábrica antes del descuento, ¿cuánto le cuesta, cuál es el precio al que vende y cuánto gana en cada par de zapatos? □

Los números con signo

Primeros ejemplos

La idea de utilizar los símbolos + y – para indicar cómo se ubican ciertas cantidades respecto a otra que se toma como valor de referencia, no es difícil de comprender. Pero plantear y realizar operaciones donde intervengan números con signo y, en particular, cantidades negativas, resulta menos accesible para muchos alumnos. Esto no es algo que deba sorprender, ya que aun grandes matemáticos de los siglos pasados tuvieron dificultades para entender la naturaleza de los números negativos, a los que consideraban "falsos", a pesar de que reconocían la utilidad de disponer y operar con ellos.

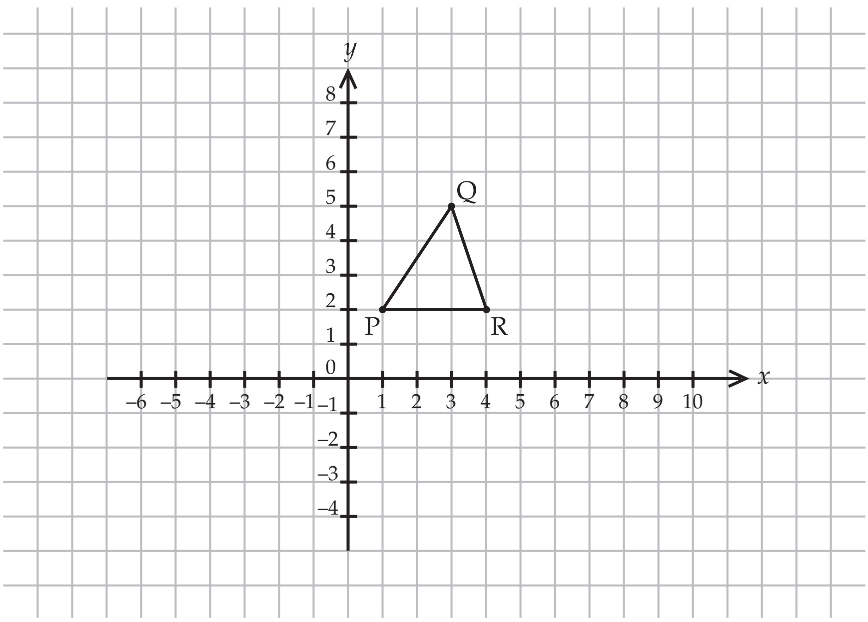
Los números negativos son el resultado de un proceso de abstracción en el cual el desarrollo del álgebra y sus procedimientos jugaron un papel central. Si bien es posible utilizar situaciones concretas para explicar algunos aspectos relacionados con ellos, resulta muy difícil encontrar un modelo intuitivo que ilustre por sí solo, aunque sea de manera aproximada, la diversidad de situaciones que pueden presentarse al operar con estos números. Por otro lado, no es raro que la búsqueda de este tipo de modelos conduzca a plantear en el salón de clases actividades que con frecuencia resultan artificiales y de escaso valor para el aprendizaje de las matemáticas.

Por razones como las anteriores, se sugiere acercarse gradualmente al estudio de los números con signo, dando tiempo a que los alumnos maduren sus ideas y comprendan la necesidad de operar con ellos en diversas situaciones, sobre todo al manejar expresiones algebraicas. Se podrá comenzar con problemas que requieran el uso de los números con signo para indicar ganancias y pérdidas, temperaturas sobre y bajo 0 y otras situaciones similares.

En particular, debe haber actividades que les permitan utilizar desde el principio los números con signo para ubicar puntos en la recta numérica y los cuatro cuadrantes del plano cartesiano.

Por ejemplo

1. Dibuja un sistema de ejes coordenados y copia la siguiente figura.



a) Encuentra las coordenadas de los puntos marcados con las letras P, Q y R.

b) Invierte el signo de la primera coordenada de los puntos P, Q y R y localiza en el plano coordenado los puntos que corresponden a las parejas que obtuviste. Une los puntos para que veas la figura que se forma.

c) Repite el paso b, pero invirtiendo los signos de la segunda coordenada.

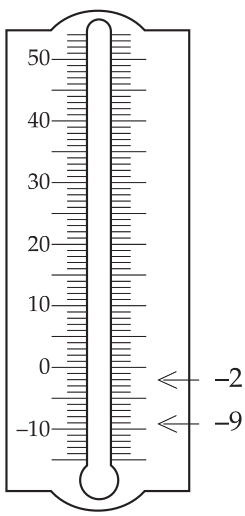
¿Qué crees que ocurrirá si invertimos al mismo tiempo los signos de las dos coordenadas? ¿Y si sumamos 2 a la primera coordenada y 3 a la segunda? ¿Y si multiplicamos las coordenadas por 0.25, 0.5, 2, 3, ...? ¿Y por –0.5, –1, –2, –3, ...?

Es conveniente que desde las primeras actividades los alumnos se den cuenta de que los números negativos pueden ser enteros, decimales o fraccionarios, evitando tratar por separado las diferentes clases de números con signo. No obstante, para no complicar innecesariamente el tratamiento de este tema, es mejor que al principio se opere sobre todo con números enteros, o decimales sencillos.

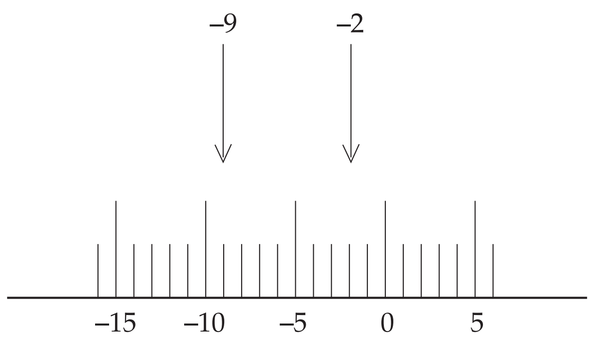
Operaciones de números con signo

Los alumnos están acostumbrados a manejar los números naturales y les tomará tiempo habituarse a los números negativos y operar con ellos. Deberán aprender que comparar y sumar estos números es diferente de comparar y sumar números positivos y no desconcertarse porque, por ejemplo, –9 es menor que –2, o porque 5 + (–2) es una suma y no una resta.

El uso de números positivos y negativos en un termómetro o para representar ganancias y pérdidas, así como la localización de puntos y los desplazamientos en la recta numérica, son ejemplos de modelos y situaciones concretas que ayudarán a dar sentido y comprender cómo se comparan y suman números con signo.

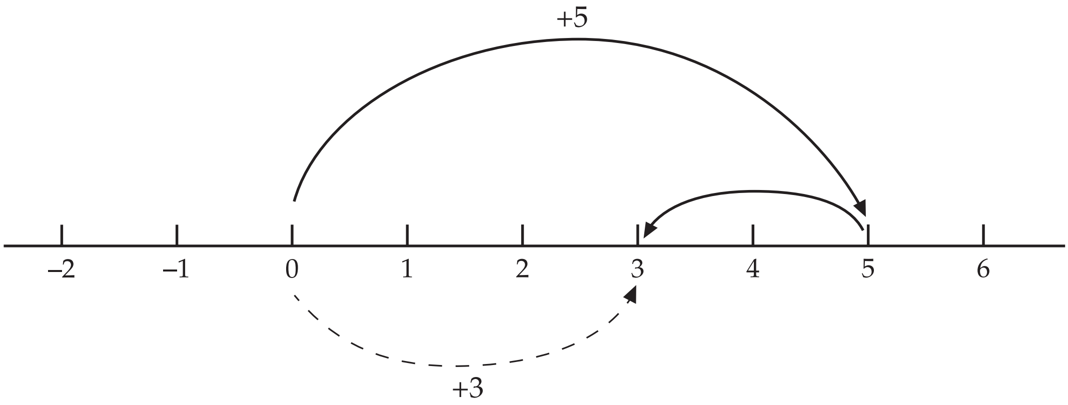


–9 < –2



–9 < –2

Un salto o desplazamiento de +5 seguido de otro de –2 da como resultado un salto o desplazamiento efectivo de +3.



$5 + (-2) = 3$

La comprensión de la sustracción de números con signo se facilitará si desde el momento de estudiar las operaciones con números naturales y decimales positivos se prevén actividades que permitan a los alumnos ver a la adición y a la sustracción como operaciones inversas la una de la otra.

La búsqueda de regularidades y patrones de comportamiento en situaciones como las siguientes ayudará a que las operaciones donde aparecen cantidades negativas sean vistas como una extensión natural de las operaciones con números positivos.

Por ejemplo

1. Realiza las operaciones indicadas y localiza los resultados en la recta numérica:

a) $20 + 20 = 40$

b) $20 + 10 = 30$

c) $20 + 0 = 20$

d) $20 + (-10) =$

e) $20 + (-20) =$

f) $20 + (-30) =$

g) $20 + (-40) =$

h) $20 + (-50) =$

i) $12 - 20 = -8$

j) $12 - 15 = -3$

k) $12 - 10 =$

l) $12 - 5 =$

m) $12 - 0 =$

n) $12 - (-5) =$

ñ) $12 - (-10) =$

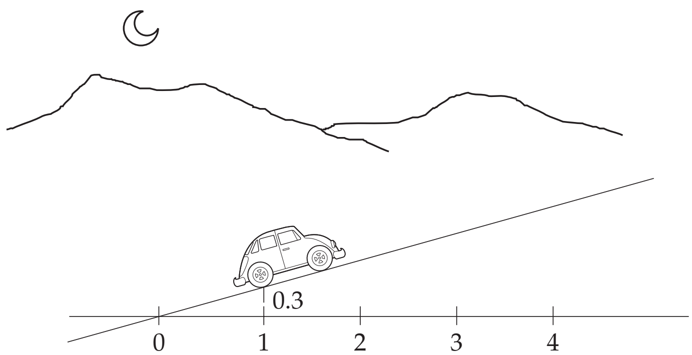
o) $12 - (-15) =$

2. Realiza las operaciones indicadas y localiza los resultados en la recta numérica.

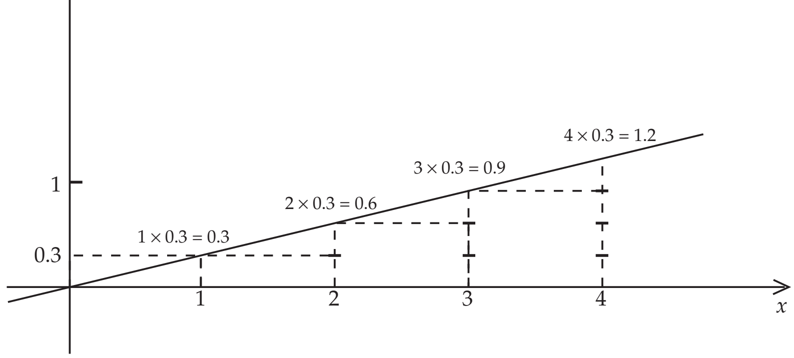
a) $3 \times 3 =$	*g)* $(-2) \times 2 =$	*m)* $3 \times (-3) =$
b) $3 \times 2 =$	*h)* $(-2) \times 1 =$	*n)* $2 \times (-3) =$
c) $3 \times 1 =$	*i)* $(-2) \times 0 =$	*ñ)* $1 \times (-3) =$
d) $3 \times 0 =$	*j)* $(-2) \times (-1) =$	*o)* $0 \times (-3) =$
e) $3 \times (-1) =$	k*)* $(-2) \times (-2) =$	*p)* $(-1) \times (-3) =$
f) $3 \times (-2) =$	*l)* $(-2) \times (-3) =$	*q)* $(-2) \times (-3) =$

Interpretación geométrica de la multiplicación de números con signo

1. En la ilustración aparece una recta inclinada que representa una rampa de pendiente constante y una recta horizontal que representa el nivel del suelo. Al desplazarnos una unidad en la dirección horizontal, el punto correspondiente sobre la rampa se encuentra a una altura de 0.3 unidades. ¿A qué altura nos encontraremos sobre la rampa al desplazarnos 2, 3, 4, o más unidades en la dirección horizontal?

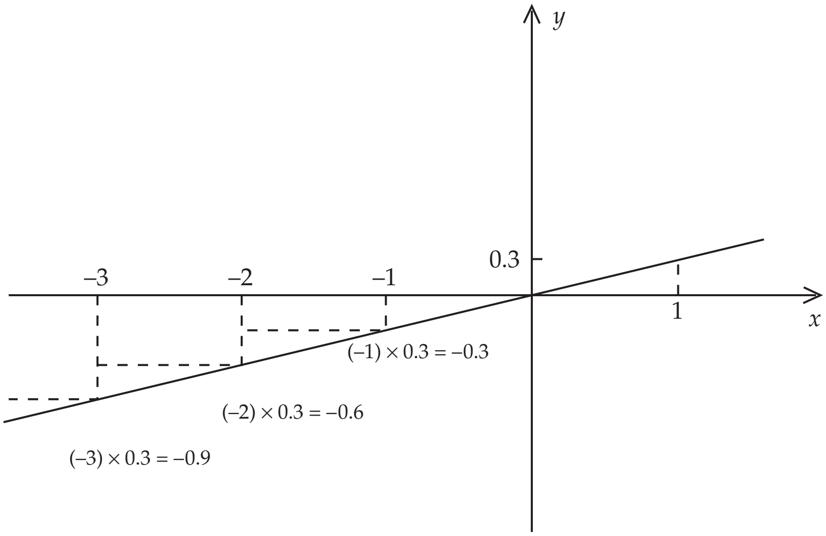


La respuesta se obtiene multiplicando 2, 3, 4,... por 0.3, como puede verifi-carse en la siguiente figura.

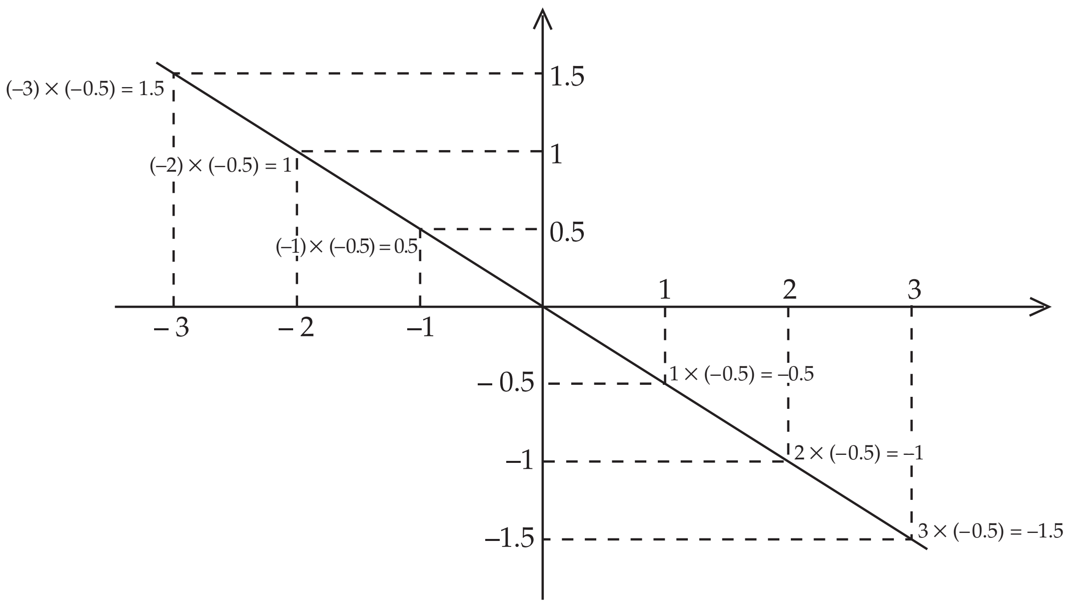


Midiendo alturas y distancias la rampa anterior puede utilizarse para multiplicar cualquier número por 0.3.

Ahora, si prolongamos hacia la izquierda tanto la recta horizontal como la rampa, veremos que sobre los puntos –1, –2, –3,... en estos casos las alturas correspondientes serán negativas, pero también se obtienen multiplicando 0.3 por –1, –2, –3,... ¡La rampa también sirve para multiplicar números negativos por 0.3!



En forma similar se pueden construir rampas que sirvan para multiplicar por números negativos, por ejemplo, para multiplicar por – 0.5. El procedimiento es el mismo que antes: primero se dibuja una recta numérica horizontal y sobre el 1 se considera una altura de – 0.5, luego se traza la recta que une el 0 con el extremo de dicha altura.



La calculadora y los números con signo

El uso de la calculadora ayuda a que los alumnos se acostumbren a operar con números con signo y, como se señaló en páginas anteriores, con el uso de las teclas $\boxed{-}$, $\boxed{+/-}$, $\boxed{\text{M+}}$ y $\boxed{\text{M}-}$ comprendan los diferentes significados que puede tener el símbolo – en una expresión.

Para operar con números con signo se utiliza la tecla $\boxed{+/-}$ de inversión de signo, cuya función es cambiar el signo a las cifras que aparecen en pantalla.

Por ejemplo

1. Realiza las siguientes operaciones en la calculadora.

a) 8 + (–5) + 3 + (–7)=

$$\boxed{8}\boxed{+}\boxed{5}\boxed{+/-}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{+}\boxed{7}\boxed{+/-}\boxed{=}$$

b) (–7) – (–3) – 9 + (–2)=

$$\boxed{7}\boxed{+/-}\boxed{-}\boxed{3}\boxed{+/-}\boxed{-}\boxed{9}\boxed{+}\boxed{2}\boxed{+/-}\boxed{=}$$

c) (– 4) × (–12)=

$$\boxed{4}\boxed{+/-}\boxed{\times}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{+/-}\boxed{=}$$

¿Cómo se realizarían las operaciones anteriores en una calculadora que no dispusiera de la tecla $\boxed{+/-}$ de inversión de signo?

2. Utiliza la calculadora para completar las siguientes tablas:

+	312	–121	–28
		–506	
–236			
			–117
115			
–211			

×	31	–16	– 7
	– 403		
–27			
		–336	
			35
–11			

Métodos aproximados y cálculo de la raíz cuadrada

Métodos aproximados

En el primer y segundo grados de educación secundaria la introducción de ciertas técnicas de cálculo aproximado, como son el uso de números truncados y redondeados, tiene como propósito principal que los alumnos desarrollen sus habilidades para simplificar un cálculo y estimar su resultado.

En el tercer grado, en cambio, se trata que los estudiantes reconozcan las componentes de un cálculo y el tipo de errores asociados a cada una de ellas, para que se den cuenta de que en muchos cálculos no es posible utilizar procedimientos exactos y se debe recurrir a métodos de aproximación.

El uso de métodos aproximados y la estimación de errores en situaciones sencillas ayuda a los alumnos a desarrollar una visión más completa y realista de las matemáticas y de los procedimientos de cálculo, al mismo tiempo que están en contacto con nociones y conceptos que les serán útiles en todos sus estudios. En particular, es importante que puedan realizar un mismo cálculo por diversos métodos y los comparen desde el punto de vista de su exactitud y comodidad de empleo.

Por ejemplo

1. Supóngase que se conocen las dos primeras cifras decimales de $\sqrt{99} = 9.94...$, calcular la diferencia $10 - \sqrt{99}$.

En este caso se puede calcular la diferencia directamente:

$$10 - \sqrt{99} \approx 10 - 9.94 = 0.06$$

o bien hacerlo como sigue:

$$10 - \sqrt{99} = \frac{1}{10 + \sqrt{99}} \approx \frac{1}{19.94} = 0.05015\ldots$$

Los alumnos verán en la calculadora que el segundo resultado está más cerca del resultado exacto que el primero.

Observación. La igualdad:

$$10 - \sqrt{99} = \frac{1}{10 + \sqrt{99}}$$

se obtiene racionalizando:

$$10 - \sqrt{99} = (10 - \sqrt{99})\,\frac{10 + \sqrt{99}}{10 + \sqrt{99}} = \frac{100 - 99}{10 + \sqrt{99}} = \frac{1}{10 + \sqrt{99}}$$

2. Calcular el cociente:

$$\frac{1}{0.98}$$

Puede realizarse la división en forma directa:

$$\begin{array}{r|l}
 & 1.020408... \\ \hline
98 & 100 \\
 & \quad 200 \\
 & \qquad 400 \\
 & \qquad\quad 800 \\
 & \qquad\qquad 16 \\
 & \qquad\qquad\ ...
\end{array}$$

O bien puede utilizarse la fórmula siguiente, válida para $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Haciendo $x = 0.02$, se tiene:

$$\frac{1}{0.98} = \frac{1}{1 - 0.02} = 1 + 0.02 + (0.02)^2 + (0.02)^3 + \dots$$

$$= 0.02 + 0.0004 + 0.000008 + \dots$$

$$= 1.020408 \dots$$

Observación. La fórmula (1) se obtiene al dividir:

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ \hline
1 - x & 1 \\
 & \underline{-1 + x} \\
 & \quad x \\
 & \quad \underline{-x + x^2} \\
 & \qquad x^2 \\
 & \qquad \underline{-x^2 + x^3} \\
 & \qquad\quad x^3 \\
 & \qquad\quad \underline{-x^3 + x^4} \\
 & \qquad\qquad x^4 \\
 & \qquad\qquad \dots
\end{array}$$

De donde se ve que:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + \frac{x^n}{1-x}$$

A medida que n se hace grande y como $|x| < 1$, el valor de x^n se hace muy pequeño, lo que quiere decir que el último sumando puede despreciarse y se tiene la fórmula (1).

Raíz cuadrada

La raíz cuadrada es con frecuencia llamada la quinta operación fundamental de la aritmética, porque junto con la adición, la sustracción, la multiplicación y la división es la operación que más aparece en nuestros cálculos. Por esta razón, y porque los métodos para calcular la raíz cuadrada permiten a los alumnos conocer algunas ideas importantes de las matemáticas, es conveniente no reducirla a una tecla de la calculadora.

Existen muchos métodos para calcular la raíz cuadrada de un número y la mayoría son más comprensibles y eficientes que el método tradicional de la "casita", aunque para algunas necesidades este método puede ser el más conveniente. Paradójicamente, el método más eficiente es el más simple de explicar, como veremos a continuación.

El método babilónico

Este método está basado en el hecho de que obtener la raíz cuadrada de un número N equivale a encontrar cuánto mide el lado de un cuadrado de área N. Para llevar adelante este cálculo se comienza con cualquier rectángulo de área N y, a partir del mismo, se construye una sucesión de rectángulos de la misma área, pero con lados cada vez más parecidos entre sí, es decir, una sucesión de rectángulos cada vez más parecidos a un cuadrado.

Ilustraremos este método mediante el cálculo de la raíz cuadrada de 2. Así no sólo se simplificarán los cálculos, sino que veremos un ejemplo importante desde el punto de vista histórico.

Paso 1

Comenzamos tomando un rectángulo de área 2, por ejemplo, el rectángulo cuyos lados miden 1 y 2, respectivamente.

Paso 2

Para obtener un rectángulo de lados más parecidos entre sí, tomamos un rectángulo cuya base sea el promedio de 1 y 2. Esto es:

$$\text{base} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Como el área del rectángulo tiene que ser 2, tenemos que:

$$\text{altura} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} = 1.333\ldots$$

Es fácil verificar que:

$$\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

o lo que es lo mismo:

$$1.333\ldots < \sqrt{2} < 1.5$$

Paso 3

Si queremos obtener un rectángulo de lados aún más parecidos entre sí, tomamos uno cuya base sea el promedio de los lados del rectángulo que se obtuvo en el paso anterior:

$$\text{base} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12} = 1.416\ldots$$

Como el área tiene que ser 2, tenemos:

$$\text{altura} = \frac{2}{\frac{17}{12}} = \frac{24}{17} = 1.411\ldots$$

y se verifica que:

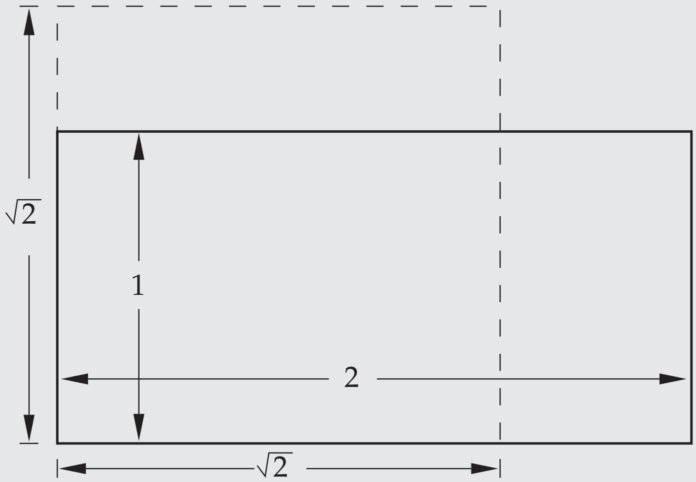
$$\frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$$

o equivalentemente:

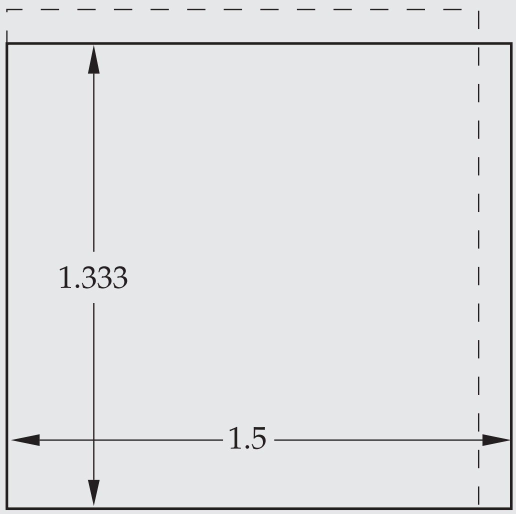
$$1.411\ldots < \sqrt{2} < 1.416$$

Si en este momento se dibujara el rectángulo obtenido, sería difícil distinguirlo a simple vista de un cuadrado, como se observa en la figura de la página anterior.

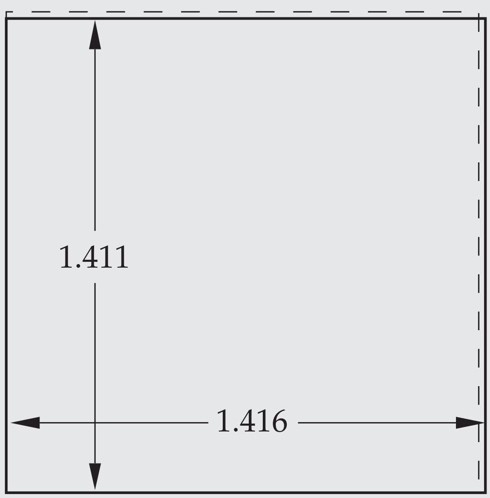
CÁLCULO DE $\sqrt{\mathbf{2}}$ POR EL MÉTODO BABILÓNICO



Se parte de un rectángulo de dimensiones 2×1 para llegar a un cuadrado de la misma área (punteado en la figura).



En el primer paso se obtiene un rectángulo cuyas dimensiones son 1.5 y 1.333… respectivamente.



En el segundo paso se obtiene un rectángulo cuyas dimensiones son 1.416 y 1.411, prácticamente indistinguible del cuadrado en el dibujo (en realidad, en el dibujo se han exagerado las diferencias entre el rectángulo y el cuadrado).

Paso 4

Procediendo como en los pasos anteriores se obtiene:

$$\frac{816}{577} < \sqrt{2} < \frac{577}{408}$$

o, equivalentemente, que:

$$1.414211\ldots < \sqrt{2} < 1.414215\ldots$$

Lo que quiere decir que, hasta la quinta cifra decimal, se tiene:

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots$$

Si se continúa en la misma forma se verá que en el siguiente paso se obtienen más de 10 cifras decimales exactas; en el siguiente, más de 20 y así sucesivamente. De hecho, a partir del paso que sigue, se obtienen más cifras decimales de las que pueden observarse en la pantalla de la calculadora.

Una forma distinta de ver el método babilónico

El método que veremos a continuación está basado en una idea muy sencilla: *si en una suma hay uno o varios sumandos que son muy pequeños respecto de los demás, podemos despreciarlos, es decir, no tomarlos en cuenta, sin alterar demasiado el valor de la suma.*

Supongamos ahora que a es un valor aproximado de $\sqrt{N}$. Esto quiere decir que $\sqrt{N}$ puede escribirse como la suma de a más un número x, donde x es muy pequeño respecto de $\sqrt{N}$

$$\mathrm{a} + x = \sqrt{N} \quad \text{con } \mathrm{x} < \sqrt{N} \text{ ------ (1)}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$a^2 + 2ax + x^2 = N$$

Ahora bien, como x es muy pequeño respecto de $\sqrt{N}$, también lo es x^2 respecto de N, por lo que podemos eliminar este sumando del lado izquierdo para obtener:

$$a^2 + 2ax \approx N$$

de donde despejando x y sustituyendo en (1) se obtiene:

$$x \approx \frac{N - a^2}{2a}$$

y de aquí

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{N - a^2}{2a} = \frac{a^2 + N}{2a}$$

Esto es:

$$\sqrt{N} \approx \frac{a^2 + N}{2a}$$

Aplicando reiteradamente esta fórmula podemos aproximarnos al valor $\sqrt{N}$ de tanto como queramos (el lector puede verificar que si se comienza con $a = 1$, al aplicar varias veces la fórmula se obtienen los mismos valores que en el ejemplo anterior).

Otra aplicación de las mismas ideas

Queremos obtener la raíz cuadrada de 2 809.

Como 2 809 está entre 100 y 10 000, entonces la parte entera de su raíz cuadrada tiene dos cifras (¿por qué?). Si denotamos por x la cifra de las decenas y por y la de las unidades, tenemos:

$$10x + y \approx \sqrt{2809}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación tenemos:

$$100x^2 + 20xy + y^2 = 2809 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Ahora nos conviene pensar que los términos $20xy$ y y^2 son pequeños respecto de $100x^2$ y que, por lo tanto, podemos eliminarlos del lado derecho y escribir:

$$100x^2 \approx 2809$$

de donde vemos que:

$$x^2 \approx 28.09$$

Como x tiene que ser un dígito, tenemos que:

$$\boxed{x = 5}$$

A continuación sustituimos este valor en (2):

$$2500 + 100y + y^2 \approx 2809$$

Esto es:

$$100y + y^2 \approx 309$$

Si razonamos como antes podemos suponer que y^2 es muy pequeño respecto a los otros términos, por lo que al eliminarlo obtenemos:

$$100y \approx 309$$

$$y \approx 3.09$$

Nuevamente, como y tiene que ser un dígito, no queda otra opción que poner:

$$\boxed{y = 3}$$

Tenemos entonces que:

$$\sqrt{2809} = 10 \times 5 + 3 = 53$$

Verificación:

$$\begin{array}{r} 53 \\ \times \quad 53 \\ \hline 159 \\ 265 \\ \hline 2809 \end{array}$$

1. Investigar si el método anterior funciona siempre, y si esto no ocurre podrá averiguar en qué casos no funciona y cómo se procede entonces. También es interesante preguntarse por qué funciona. □

Existen muchas otras formas de calcular la raíz cuadrada que no nos detendremos a discutir con detalle en estas páginas. Por ejemplo, si a y b son dos números positivos tales que:

$$a < \sqrt{N} < b$$

entonces $\sqrt{N}$ puede calcularse utilizando la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_n + 1 = \dfrac{bx_n + N}{b + x_n} \end{cases}$$

También, si se tiene que a es una aproximación de $\sqrt{N}$, se puede demostrar que:

$$\sqrt{N} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \dots}}}}$$

donde $r = N - a^2$.

Por ejemplo, para calcular $\sqrt{2}$ se puede tomar $a = 1$ y se tiene:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}$$

y utilizar las siguientes fracciones para aproximar el valor de $\sqrt{2}$:

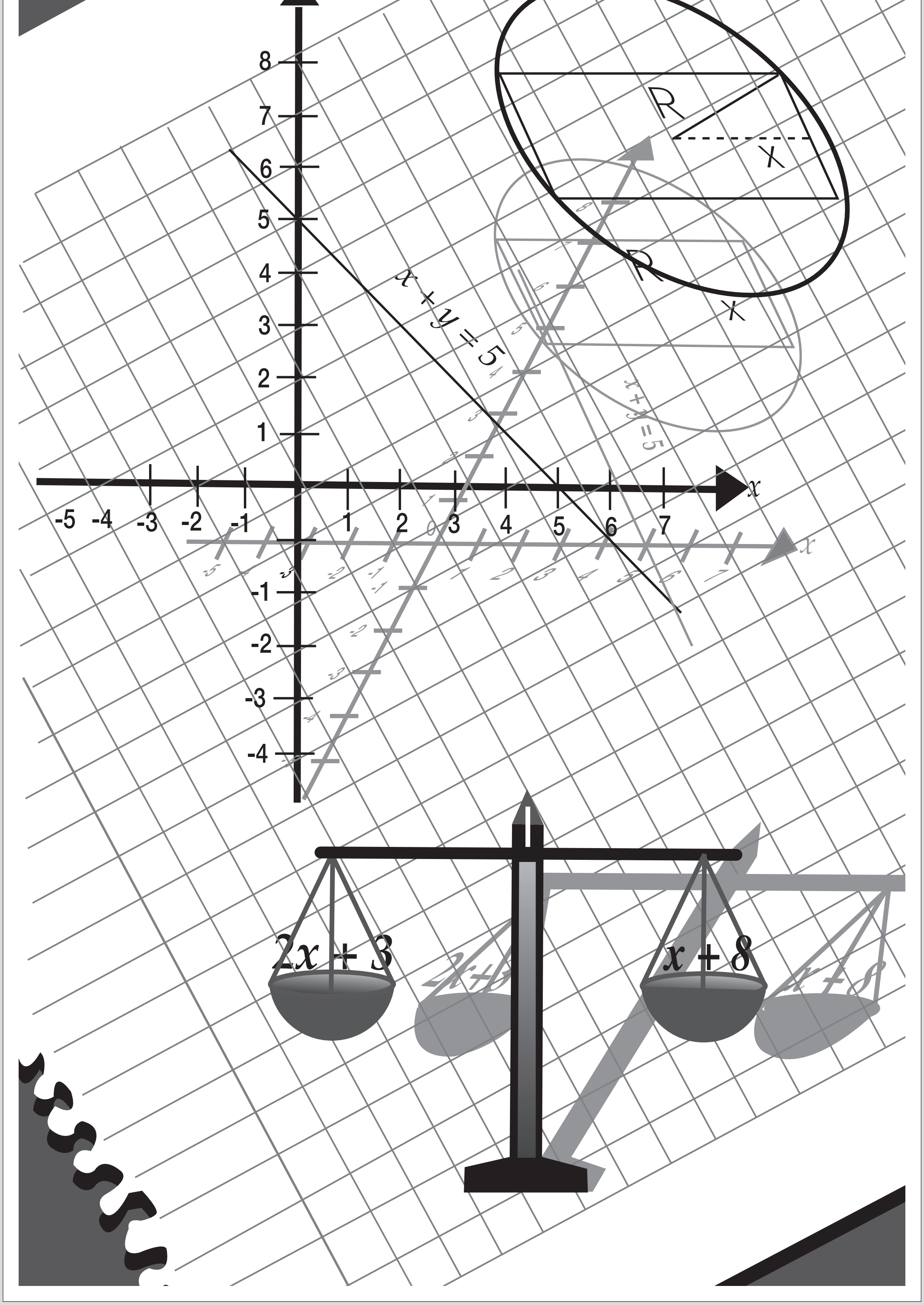
$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1.4$$

$$\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1.416\dots$$

y así sucesivamente.

El profesor podrá utilizar los métodos anteriores y otros que conozca o descubra. La idea no es que las fórmulas se deduzcan o memoricen, sino que se practiquen y puedan compararse diversos métodos para calcular la raíz cuadrada.



Álgebra

- El álgebra en la educación secundaria
- Preálgebra
- Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales
- Plano cartesiano y funciones
- Operaciones con expresiones algebraicas
- Productos notables y factorización
- Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado

Álgebra

El álgebra en la educación secundaria

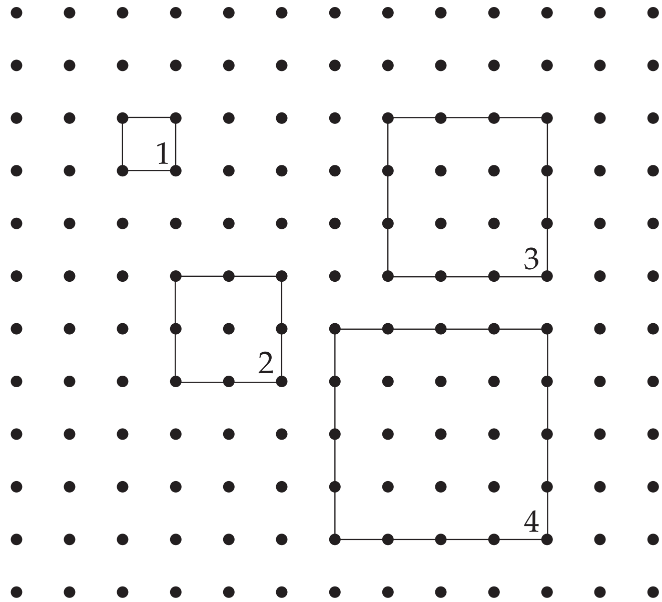
El álgebra, más que cualquier otra parte de las matemáticas en la educación secundaria, representa la transición entre la aritmética y la geometría elementales de la primaria y las matemáticas de grados superiores. Casi todas las matemáticas de la preparatoria y la universidad requieren del lenguaje del álgebra para modelar situaciones y resolver problemas, así como para expresar conceptos y operar con ellos en niveles cada vez más abstractos.

El aprendizaje del álgebra es importante para todos los alumnos y no sólo para aquellos que van a continuar sus estudios en una carrera técnica y universitaria. En nuestros días ha quedado atrás la vieja idea de que aprender a leer y escribir, y un mínimo de conocimientos aritméticos y geométricos, —junto con un adiestramiento para realizar determinadas tareas— permite desempeñar un trabajo o ejercer un oficio. La mayoría de los empleos que se crean actualmente requieren de individuos con mayor preparación, capaces de asimilar nueva información y utilizarla para resolver problemas, así como de acceder al uso de nuevos instrumentos y técnicas. Aun actividades que se han vuelto tan cotidianas y necesarias para el trabajo, como llenar un formulario o leer un instructivo o manual de operación, necesitan que las personas conozcan y estén familiarizadas con los modos de expresión simbólica y pensamiento abstracto que se desarrollan por medio del estudio del álgebra, como son poder extraer información de cuadros, tablas y gráficas, comprender fórmulas y saber utilizarlas.

Para favorecer el acceso al álgebra, es conveniente que desde el primer grado de la educación secundaria los alumnos se acostumbren de manera gradual a utilizar expresiones con literales, a las primeras reglas sencillas de escritura algebraica y a otros temas que desde la aritmética y la geometría preparan el estudio de esta disciplina. Las actividades deberán enfatizar el uso de situaciones concretas y su representación por medio de tablas y gráficas, para que el alumno explore regularidades y patrones y aprenda a expresarlos simbólicamente, sin intentar llegar todavía a la manipulación algebraica de los símbolos.

Por ejemplo

1. En la cuadrícula de la siguiente página aparecen dibujados algunos cuadrados. Dibuja otros de mayor tamaño y llena la tabla que se muestra a continuación.



Si conoces lo que mide cada lado, ¿cómo encuentras el número de puntos en el lado? ¿En la frontera? ¿En el interior? Busca otras relaciones entre los valores que aparecen en las columnas de la tabla.

Lado L	Perímetro P	Área A	Puntos por lado x	Puntos interiores y	Puntos en la frontera z	Total de puntos w
1						
2						
3	12	9	4	4	12	16
4						
5						
6						
7						
8						

La adquisición de las nociones algebraicas toma tiempo para completarse y, además, no todos los alumnos aprenden con la misma facilidad o rapidez. Los programas de segundo y tercer grado están diseñados de manera que el profesor pueda adaptarse a los distintos ritmos de aprendizaje de sus alumnos y ofrecerles la oportunidad de movilizar y enriquecer constantemente los conocimientos vistos con anterioridad, al mismo tiempo que controla el grado de adquisición alcanzado. En el segundo grado, el álgebra comienza con el estudio de las ecuaciones lineales, las regiones y subconjuntos del plano cartesiano, el planteo de problemas que conducen a sistemas sencillos de ecuaciones lineales y su resolución por el método de sustitución, y las primeras operaciones con monomios y polinomios. En el tercer grado se profundiza y completa el estudio de los temas anteriores y se introducen además los temas de productos notables, factorización y ecuaciones cuadráticas, poniendo énfasis en la factorización de polinomios de segundo grado y la solución de ecuaciones cuadráticas por diversos métodos.

Es importante que durante todo el aprendizaje del álgebra los alumnos la utilicen para resolver problemas que doten de sentido a las nociones y procedimientos algebraicos. Estos problemas no sólo deben aparecer después de que se han estudiado las formas de resolverlos, como aplicaciones de los mismos, sino que deberán estar presentes en todas las fases del aprendizaje, para introducir y facilitar la comprensión de nuevos conocimientos, así como para enriquecer los que se hayan visto con anterioridad.

El álgebra que conocemos es el resultado de un largo proceso de desarrollo, en el cual los historiadores distinguen tres etapas bien diferenciadas: la del *álgebra retórica*, cuando todavía no existían símbolos algebraicos y tanto los problemas como las ecuaciones se expresaban enteramente en el lenguaje natural; la del *álgebra sincopada*, en la que el lenguaje natural se combina con el uso de algunos símbolos —por ejemplo, letras para representar las incógnitas—; y la etapa del *álgebra simbólica* que utilizamos hoy en día, cuando el lenguaje algebraico se ha vuelto autónomo en relación al lenguaje natural y tiene sus propias reglas de sintaxis. En la etapa retórica, el problema, las ecuaciones y sus soluciones se expresaban en lenguajes prácticamente indistinguibles; con la evolución del álgebra terminaron por expresarse en lenguajes distintos. Las notaciones y el lenguaje simbólico del álgebra constituyen uno de los grandes logros de las matemáticas y son un instrumento imprescindible para el pensamiento abstracto y la solución de problemas. Tanto es así que en el siglo XVIII y a principios del XIX se pensó que todas las matemáticas y sus aplicaciones podían vertirse en el álgebra.

Los alumnos tienen dificultades para dominar este lenguaje simbólico. Es común que al principio se desconcierten por el uso de literales y que, un poco más tarde, desarrollen formas de expresión y solución de problemas donde se mezclan el lenguaje natural con el uso, no siempre correcto, de expresiones simbólicas. Por ello, el profesor deberá plantear actividades que los ayuden a rebasar paulatinamente estas etapas del aprendizaje y, al mismo tiempo, les comuniquen la importancia que tiene pasar de una situación o enunciado a su expresión simbólica y operar con ella.

Preálgebra

Utilizaremos el término *preálgebra* para referirnos a la introducción gradual de las expresiones con literales, las primeras reglas de escritura algebraica y otros temas que preparan el acceso al álgebra, como son las ecuaciones que pueden resolverse por medios aritméticos y las primeras ideas relacionadas con la jerarquía de operaciones y el uso de paréntesis en la aritmética. Este último tema ya se trató en la parte de aritmética de este libro.

Primeras actividades

En algunos casos, las expresiones con literales forman parte del conocimiento que poseen los alumnos al ingresar a la educación secundaria. Así ocurre, por ejemplo, con las fórmulas sencillas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de las figuras y cuerpos usuales. Sin embargo, estas fórmulas sólo han sido vistas como abreviaturas de los procedimientos, por lo que los alumnos casi nunca han utilizado las expresiones con literales para simbolizar una relación aritmética o geométrica entre cantidades.

Las siguientes actividades podrán servir para apoyar este aprendizaje.

Percepción de patrones y regularidades

A partir de sucesiones de números y figuras que presentan algún patrón de comportamiento, los alumnos podrán encontrar algunos de los términos que dan continuidad a la sucesión. Es conveniente comenzar con situaciones sencillas, aumentando paulatinamente el grado de dificultad, ya que en este momento sólo se trata de que los alumnos se den cuenta del patrón y puedan establecer tres o cuatro términos más de la sucesión. Problemas como estos preparan para percibir patrones y regularidades y para expresar su generalidad por medio del lenguaje numérico y diagramático.

Por ejemplo

1. Continúa las siguientes listas de números.

a) $2,\ 4,\ \square,\ \square,\ 10,\ \square,\ \ldots$

b) $4,\ 12,\ 20,\ \square,\ \square,\ \ldots$

c) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \square,\ \square,\ \ldots$

d) $22,\ 19,\ 16,\ \square,\ \square,\ \ldots$

2. Dibuja la figura faltante en cada sucesión.

a)

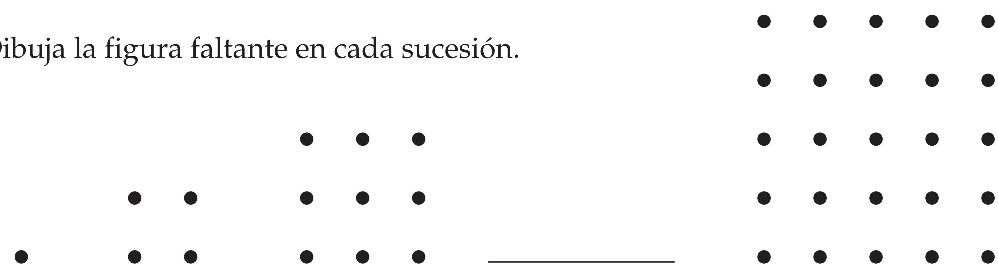


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

b)

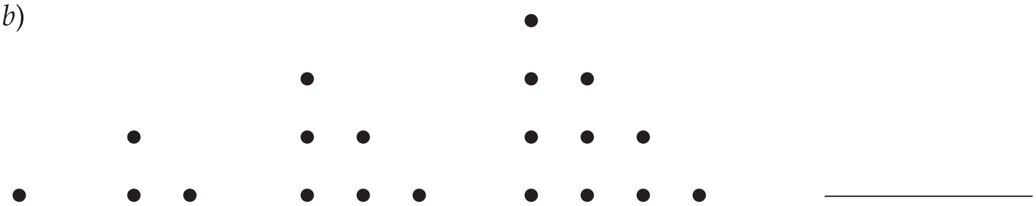


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

c)

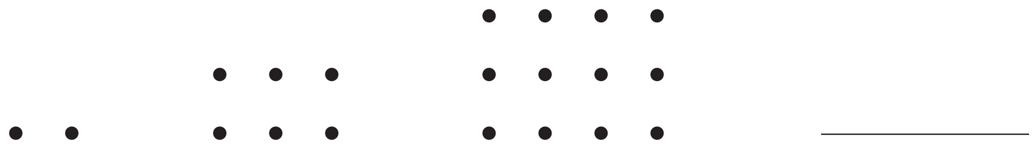


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

d)

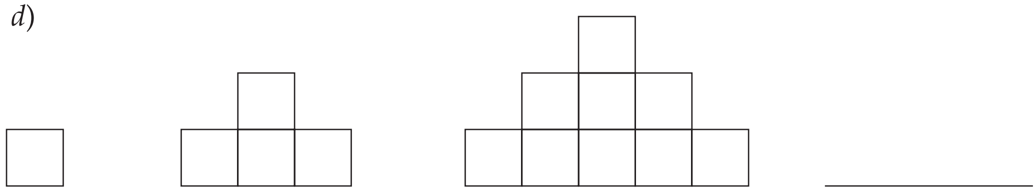


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Explicitación de la regla

En una segunda etapa, los alumnos explicitarán la regla o patrón que permite continuar la sucesión y utilizarán sus propios recursos para expresarlo, antes de introducirlos a la simbolización.

En esta fase, el profesor podrá retomar algunos de los problemas desarrollados en la etapa anterior de percepción de patrones. Por ejemplo, se puede invitar a los alumnos a comparar términos siguientes de la sucesión:

$$4 \xrightarrow{+8} 12 \xrightarrow{+8} 20 \xrightarrow{+8} 28 \xrightarrow{+8} 36\ldots$$

Por ejemplo

a fin de que expresen la forma de obtener el siguiente término a partir de uno dado. Los alumnos pueden seguir diversos procedimientos.

1.

a) 4, 4 + 8, 12 + 8, 20 + $\boxed{8}$, $\boxed{28}$ + $\boxed{8}$, $\boxed{36}$ + $\boxed{8}$, …

b) 4, 4 + 8, 4 + 16, 4 + $\boxed{24}$, $\boxed{4}$ + $\boxed{32}$, $\boxed{4}$ + $\boxed{40}$, …

c) 4, 4 + 8, 4 + 8 + $\boxed{8}$, 4 + $\boxed{8}$ + $\boxed{8}$ + $\boxed{8}$, $\boxed{4}$ + $\boxed{8}$ + $\boxed{8}$ + $\boxed{8}$ + $\boxed{8}$

Situaciones como las anteriores y otras ayudan a que los alumnos se den cuenta de la regularidad numérica que se presenta en una sucesión.

Simbolización de la regla

A partir de lo anterior, podemos proponer a los alumnos que simbolicen la regla que genera la suceción pidiéndoles que encuentren términos muy avanzados de la misma.

Por ejemplo

1. ¿Qué número aparece en el lugar 45 de la sucesión 4, 12, 20, 28, 36, ...? También podrá plantear situaciones más complejas como la siguiente:

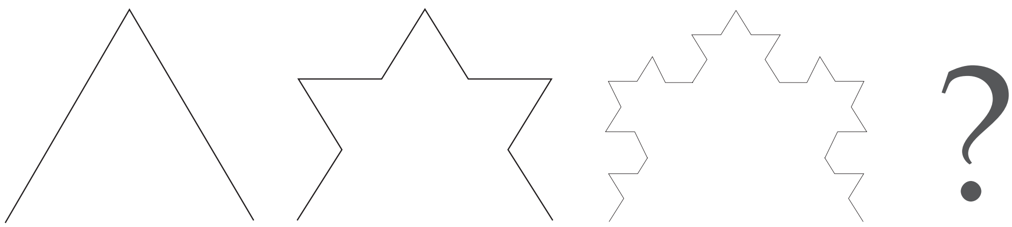


Figura 1
2 lados

Figura 2
2 x 4=8 lados

Figura 3
...lados

a) ¿Cuántos lados tendrá la figura 25 de la anterior sucesión?
b) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número de lados de cualquier figura de esta sucesión?

Tablas de dos columnas

A partir de tablas de dos columnas, los alumnos encontrarán la regla que relaciona los números de la primer columna con los de la segunda y la expresarán simbólicamente. Estas actividades son un antecedente importante de la noción de función, cuyo estudio se desarrollará en segundo y tercer grado.

Al mismo tiempo, al llenar tablas con espacios vacíos tanto en la primera como en la segunda columna, los alumnos consolidarán las nociones relacionadas con el carácter inverso de las operaciones de adición y sustracción, así como de multiplicación y división.

Por ejemplo

1. Completar las siguientes tablas.

a)

1	3
2	4
3	5
4	
5	
	8
x	

b)

1	1
2	4
3	9
4	
5	
	49
x	

Es conveniente introducir elementos de notación simbólica en los encabezados de las columnas, por ejemplo, podemos nombrarlas por medio de las letras x e y, o m y n, o s y t,...

Por ejemplo

2. Completa la siguiente tabla.

x	y
7	28
8	32
9	
40	
44	

El llenado de tablas como ésta permitirá que los alumnos se acostumbren gradualmente a los modos de expresión usuales en el álgebra, por medio de preguntas como las que siguen:

1.
a) *Si la x fuera 25, ¿cuál sería el valor de y?*

b) *¿Para qué valor de x, la y vale 48?*

c) *¿Cómo calculas el valor de y, si conoces el valor de x?*

d) *¿Qué sucede con los valores de y cuando crecen los valores de x?*

Otras actividades que los alumnos deberán practicar consisten en el llenado de tablas a partir de expresiones algebraicas sencillas.

Por ejemplo

2. Si $y = x + 2$, completar la tabla:

x	$y = x + 2$
1	
2	
3	
	6
5	

En otros problemas, el alumno construirá él mismo la tabla, escogiendo valores para x y utilizando la regla para encontrar los valores correspondientes de y. Estas actividades pueden aprovecharse para ampliar su experiencia numérica, sugiriéndoles el uso de números decimales, del 0 o de números muy grandes y proponiendo reglas o expresiones ligeramente más complicadas ($Y = 3X$; $M = N - 4$; $S = t^2$). El uso de la calculadora podrá apoyar el desarrollo de estas actividades.

No es necesario que las actividades anteriores se desarrollen a partir de situaciones abstractas, pues las tablas pueden ser, por ejemplo, el resultado de tratar problemas de cálculo y aplicación de porcentajes, de precios, costos y descuentos, de áreas y perímetros, entre otros.

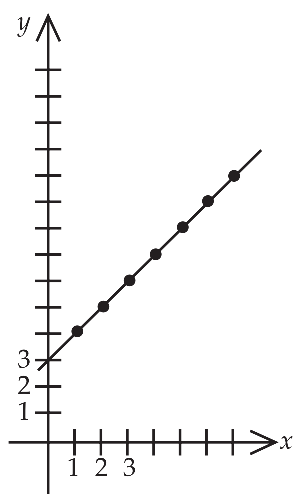
Representación en el plano cartesiano

A partir de tablas de dos columnas, los alumnos formarán parejas con los valores que aparecen en cada renglón y localizarán los puntos correspondientes en el plano cartesiano, tratando de relacionar el comportamiento de los valores en la tabla con el aspecto de la representación gráfica que se obtiene.

Las representaciones en el plano cartesiano completan una serie de modos de representar la relación entre dos secuencias de números: tabla numérica a dos columnas, expresión simbólica de la relación entre los valores que aparecen en la primera y segunda columnas y la gráfica de puntos en el plano cartesiano.

$y = x + 3$

x	$y = x + 3$
1	4
2	5
3	6
4	7
5	8
6	9
7	10



Es conveniente que el profesor retome en cada caso situaciones desarrolladas con las otras representaciones, con el fin de que se advierta que se trata de diferentes expresiones de un mismo concepto y de que es posible transitar de una representación a otra. Al relacionar las expresiones con literales con otros tipos de representaciones, se las está dotando de significado desde la etapa prealgebraica, con el propósito de evitar una iniciación al álgebra consistente en la pura manipulación de expresiones carentes de sentido para los alumnos.

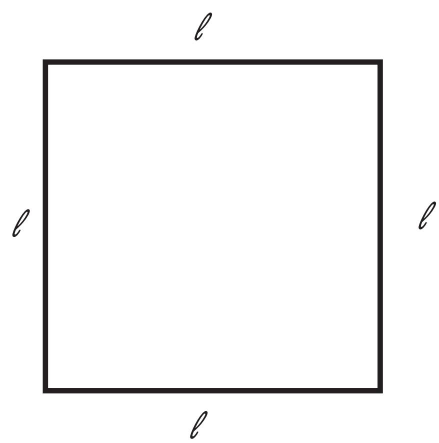
Primeras reglas de escritura algebraica

Las fórmulas geométricas para calcular el perímetro y el área de figuras sencillas pueden aprovecharse para introducir las primeras reglas de escritura algebraica. Las letras que en la escuela primaria se utilizan sobre todo para etiquetar partes de figuras geométricas, adquieren gradualmente un carácter diferente en la preálgebra: de símbolos que pueden operarse. Para ello se sugiere plantear problemas y actividades donde se solicite a los alumnos expresar de manera breve el perímetro o el área de algunas figuras sencillas.

Por ejemplo

1. Escribir una expresión para el perímetro del cuadrado de la derecha.

Ante respuestas como:



$$p = \ell + \ell + \ell + \ell$$

se puede proponer a los alumnos la escritura más breve:

$$p = 4 \times \ell$$

y constatar la equivalencia de las dos expresiones, asignándole algunos valores numéricos al lado ℓ del cuadrado.

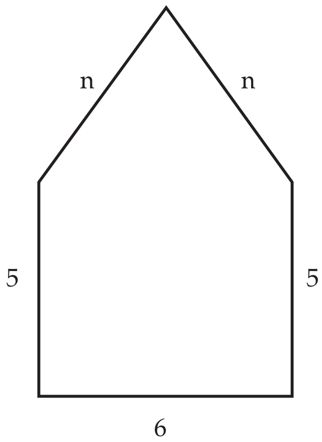
En el mismo contexto de cálculo de perímetros y áreas de figuras sencillas podrá introducirse el uso del exponente 2 para expresar un cuadrado: $A = \ell^2$ en lugar de $A = \ell \times \ell$, así como la convención de eliminar el signo de multiplicación entre dos literales o entre número y letra:

$$4 \times \ell = 4\ell, \quad b \times h = bh, \quad \pi \times r^2 = \pi r^2, \ldots$$

Expresar el perímetro o el área de otras figuras permitirá a los alumnos practicar y diversificar el uso de la escritura algebraica.

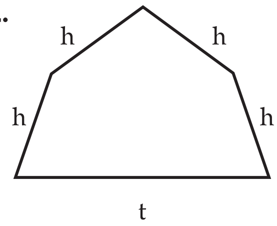
Por ejemplo

1.



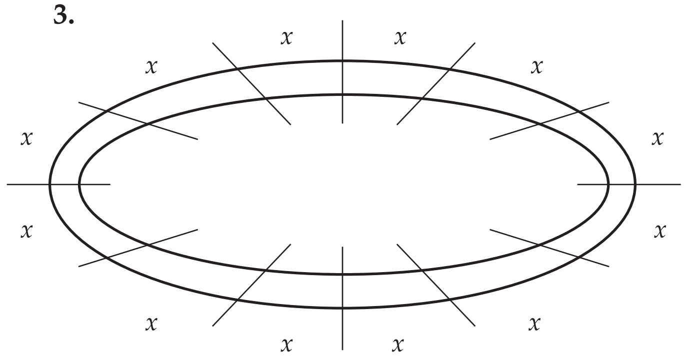
Perímetro =

2.



Perímetro =

3.



Perímetro =

Ecuaciones de un paso

Las llamadas ecuaciones aritméticas son aquellas que pueden resolverse invirtiendo las operaciones indicadas. Entre ellas, las más sencillas son las *ecuaciones de un paso*, como las siguientes:

1. $237.45 + \square = 513.25$ **2.** $809.60 - \square = 579.85$

3. $12.5 \times \square = 92.5$ **4.** $\frac{\quad}{5.5} = 13.5$

El carácter prealgebraico de estas ecuaciones proviene de que pueden resolverse sin recurrir a los procedimientos algebraicos, pues basta, como se dijo, con que los alumnos inviertan la operación indicada en la ecuación, utilizando el hecho de que una operación (restar 237.45, por ejemplo) "deshace" el efecto de su operación inversa (sumar 237.45).

Se sugiere proponer problemas que involucren números decimales o relativamente grandes, con objeto de propiciar el uso de las operaciones inversas y evitar que los alumnos resuelvan estas ecuaciones recurriendo a los hechos numéricos básicos, como son las tablas de las operaciones fundamentales. Es recomendable que se utilice la calculadora para agilizar la resolución de este tipo de ecuaciones.

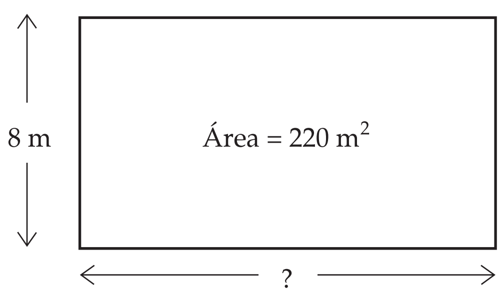
También es conveniente que haya problemas que lleven a plantear y resolver este tipo de ecuaciones, para que desde los primeros ejemplos los alumnos se percaten del valor de las ecuaciones para modelar situaciones y resolver problemas. Por ejemplo, la determinación del valor desconocido de una de las cantidades que intervienen en las fórmulas de la geometría, de la física o extraídas de otros contextos podrán servir para llevar adelante esta idea.

Por ejemplo

5. Utilizando la fórmula de la velocidad $v = d/t$, encontrar la distancia recorrida por un automóvil que viaja durante 2.5 horas a una velocidad de 80 km por hora.

$$80 = \frac{\square}{2.5}$$

6. El área de un terreno rectangular mide 220 m^2 y el frente 8 m. ¿Cuánto mide el fondo del terreno?



$$220 = 8 \times \square$$

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales

Ecuaciones de primer grado o lineales

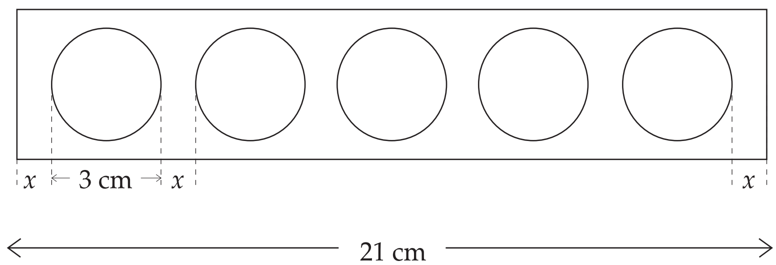
La enseñanza formal del álgebra comienza en el segundo grado de la educación secundaria. Se retomarán los temas de preálgebra vistos en el primer grado, introduciendo los elementos de lenguaje simbólico necesarios para que los alumnos puedan enfrentar con éxito la resolución de ecuaciones lineales. Esto no significa que los dos temas tengan que tratarse por separado, ya que el profesor podrá optar, si lo cree conveniente, por desarrollar el lenguaje simbólico al mismo tiempo que los alumnos aprenden gradualmente a plantear y resolver este tipo de ecuaciones.

Para lograr un aprendizaje significativo del álgebra, es necesario que los símbolos y las operaciones algebraicas se introduzcan a partir de situaciones familiares. Hacia el final del segundo grado y durante el tercero, los alumnos tendrán la oportunidad de adquirir destreza y seguridad en el manejo de los procedimientos algebraicos y utilizarlos para resolver problemas cada vez más complejos.

Las ecuaciones lineales y los métodos que sirven para resolverlas representan el primer contacto de los alumnos con algunas de las nociones y procedimientos fundamentales del álgebra, como son la noción misma de ecuación, de incógnita y los procedimientos para despejar la incógnita. Por ello es muy importante que desde el principio haya actividades y problemas para que comprendan estas nociones y se den cuenta de la forma como las condiciones de un problema se traducen en una ecuación. A continuación daremos algunos ejemplos.

Longitudes, perímetros y áreas

1. En una tira como la del dibujo se quieren hacer cinco agujeros del mismo diámetro a distancias iguales. Si cada agujero es un círculo de 3 cm de diámetro, ¿cuánto deben medir las separaciones entre agujeros señaladas en la figura con la letra x?



Al principio, los alumnos propondrán ecuaciones del estilo:

a) $x + 3 + x + 3 + x + 3 + x + 3 + x + 3 + x = 21$
o bien
b) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + x + x + x + x + x + x = 21$
o
c) $15 + x + x + x + x + x + x = 21$
o
d) $21 = x + x + x + x + x + x + 15$

y otras que se les ocurran.

En este momento conviene dejarlos en libertad de proponer y escribir sus propias ecuaciones, lo que probablemente dará lugar a muchas escrituras diferentes, pues como puede apreciarse existe una gran cantidad de ellas. Esto puede aprovecharse para revisar y enriquecer la comprensión de las reglas de escritura abreviada vistas en la preálgebra. Será interesante examinar y discutir con los alumnos las diversas formas de expresar simbólicamente la misma ecuación:

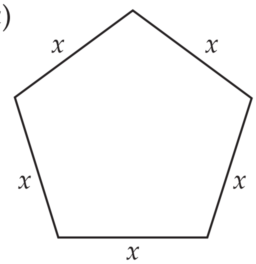
$$15 + 6x = 21 \quad \text{o} \quad 6x + 15 = 21 \quad \text{o} \quad 21 = 6x + 15 \quad \text{o} \quad 21 = 15 + 6x$$

o bien

$$15 + 3x + 3x = 21 \quad \text{o} \quad 15 + 4x + 2x = 21, \text{ etcétera.}$$

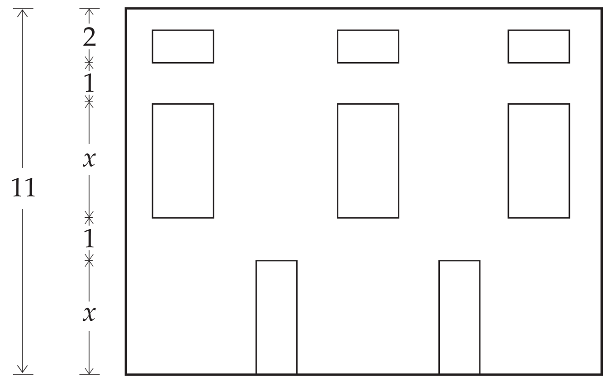
2. Encontrar el valor de x:

a)



Perímetro = 80 cm
x = ?

b)

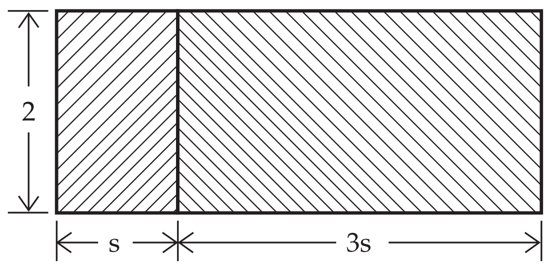


x = ?

3. Encontrar el valor de s:

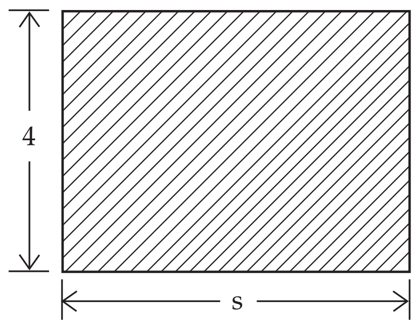
Distribución de objetos

a)



Área = 64 m^2
s = ?

b)



Área = 152 m^2
s = ?

4. Se reparten 133 chocolates entre dos grupos de alumnos. El segundo grupo recibe 19 chocolates más que el primero. ¿Cuántos chocolates recibe cada grupo?

Formas de simbolización

Primer grupo	*Segundo grupo*	*Total*
x	$x + 19$	133
		$x + x + 19 = 133$
		$2x + 19 = 133$

5. Hay un total de 40 piedras repartidas en dos pilas o montones. La primer pila tiene 7 veces el número de piedras que hay en la segunda. ¿Cuántas piedras hay en cada pila?

Formas de simbolización

Primera pila	*Segunda pila*	*Total*
7s	s	40
		7s + s = 40
		8s = 40

6. Se tienen 88 objetos que se reparten entre dos personas, la segunda persona recibe 26 menos que la primera. ¿Cuánto recibe cada una?

Formas de simbolización

Primera persona	*Segunda persona*	*Total*
x	$x - 26$	88
		$x + x - 26 = 88$
		$2x - 26 = 88$

Una vez que los alumnos se han familiarizado con problemas como los anteriores, conviene incrementar el número de ocurrencias de la incógnita y el tipo de operaciones involucradas.

Por ejemplo

1. Hay 31 piedras en tres pilas. La primera tiene 5 menos que la tercera y la segunda tiene 15 más que la tercera. ¿Cuántas piedras hay en cada pila?

2. Se reparten 76 dulces entre tres grupos. El segundo recibe 3 veces el número de dulces que el primero y el tercero recibe 4 dulces menos que el primero ¿Cuántos dulces recibe cada grupo?

Como puede verse, los problemas anteriores dan lugar a ecuaciones que se reducen fácilmente a *ecuaciones de un paso* con la ayuda de los procedimientos prealgebraicos desarrollados durante el primer grado, sólo que ahora la incógnita ya no se representa con un espacio vacío o un cuadrito en blanco, sino que se introducen literales para simbolizarla, lo que nos permite operar con ella y reducir con facilidad las ecuaciones a una de las formas siguientes:

$$x + a = b, \quad x - a = b, \quad ax + b = c$$

o bien

$$ax = b, \quad x/a = b$$

Todas estas ecuaciones pueden resolverse utilizando el procedimiento de invertir las operaciones indicadas.

El modelo de la balanza

Un paso importante hacia el pensamiento algebraico consiste en poder resolver ecuaciones cuando la incógnita aparece en ambos miembros de la ecuación. Para resolver este tipo de ecuaciones, la técnica de invertir operaciones ya no es suficiente. En este punto, los modelos de enseñanza para la resolución de ecuaciones lineales juegan un papel fundamental. Los ejemplos más sencillos de las ecuaciones a las que nos estamos refiriendo son de las formas:

$$ax + b = cx + d, \quad ax + bx + c = dx + ex + f, \text{ etcétera}$$

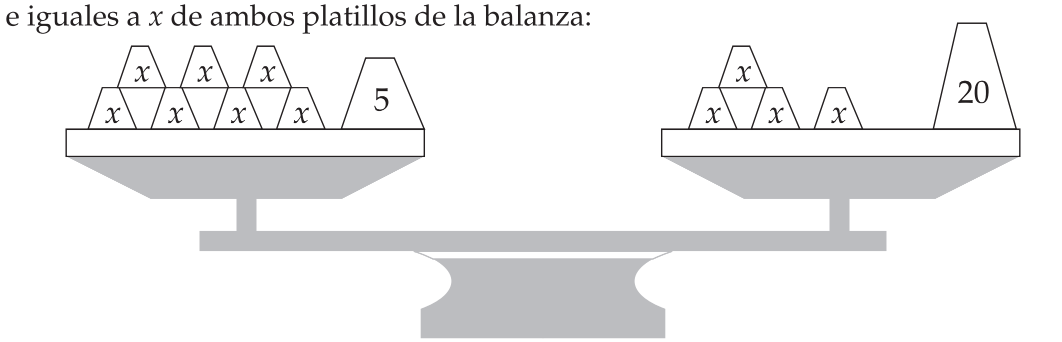
Se ha observado que los métodos para resolver estas ecuaciones se aprenden mejor si se introducen por medio de modelos como el de la balanza, en lugar de acudir a las explicaciones basadas en las propiedades estructurales de los números.

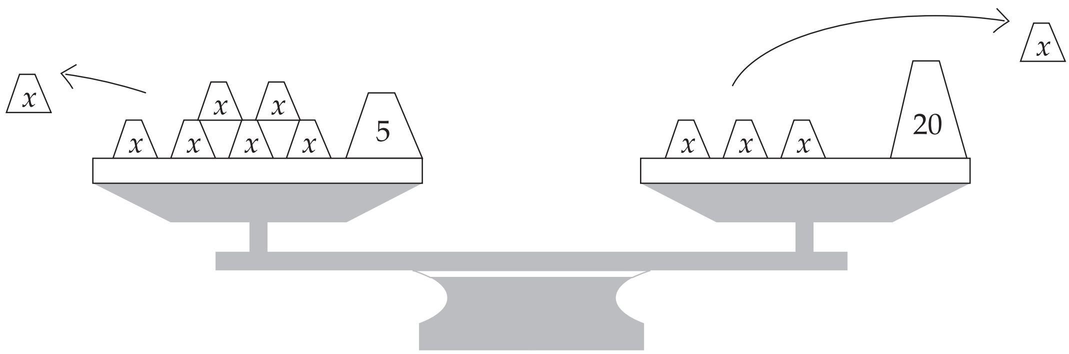
El modelo de la balanza se basa en una analogía entre lo que podemos poner o quitar en ambos platillos de una balanza sin que se pierda el equilibrio, y las operaciones que pueden realizarse en ambos miembros de una ecuación conservando la igualdad: "si hacemos lo mismo en ambos platillos de la balanza (en ambos miembros de la ecuación), el equilibrio se conserva (la igualdad no se pierde)".

En el problema que sigue la ecuación propuesta es:

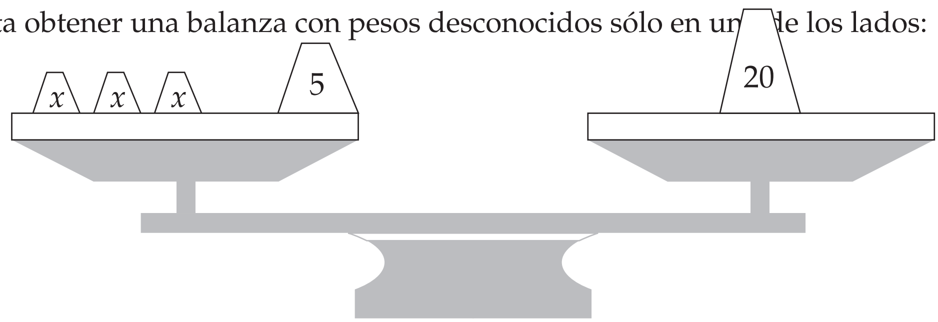
$$7x + 5 = 4x + 20$$

y las acciones que se realizan para resolverla consisten en quitar pesos desconocidos e iguales a x de ambos platillos de la balanza:





hasta obtener una balanza con pesos desconocidos sólo en uno de los lados:



Esto permite reducir la ecuación inicial a una ecuación del tipo $ax + b = c$, es decir, con la incógnita de un solo lado:

$$3x + 5 = 20$$

Luego se aplica el procedimiento de invertir operaciones para encontrar el valor de x y resolver la ecuación:

$$x = \frac{20 - 5}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

Las acciones en la balanza podrán ser referidas después a los miembros de la ecuación, conduciendo a los alumnos a los procedimientos algebraicos que sirven para operar con ambos miembros de una ecuación para resolverla. Una vez que hayan adquirido la experiencia suficiente en el uso de este modelo, es conveniente comenzar a introducir las ideas de «pasar sumando (o restando o multiplicando o dividiendo) de un lado a otro de la ecuación».

Los procedimientos que consisten en realizar las mismas operaciones en ambos miembros de la ecuación siguen el modelo de la balanza. En cambio, las reglas para pasar de un miembro a otro corresponden a una transposición de los términos de la ecuación. Las reglas de transposición representan una evolución del modelo de la balanza, en donde ciertos pasos se abrevian porque uno percibe de antemano sus efectos. Así, si en un lado de la ecuación aparece $8x$ y en el otro $5x$, sabemos que el efecto de sustraer $5x$ de ambos lados es equivalente a eliminar $5x$ del lado en que aparece y realizar la sustracción $8x - 5x$ en el otro lado.

Al utilizar el modelo de la balanza el profesor deberá estar consciente de sus ventajas y limitaciones. Este modelo proporciona una base intuitiva a las reglas de transposición de términos y, al mismo tiempo, permite que los alumnos desarrollen un pensamiento estratégico para despejar la incógnita, pueden, por ejemplo, aislar la incógnita de un solo lado o trabajar primero con los términos donde aparece la incógnita, etcétera.

Ahora bien, aunque una gran variedad de ecuaciones diferentes pueden resolverse a partir del modelo de la balanza, hay muchas otras para las cuales no resulta adecuado utilizarlo directamente, como son, por ejemplo, las ecuaciones de las formas:

$$ax - b = cx, \quad ax + b = cx - d, \quad ax - b = cx - d, \quad a - bx = cx, \text{ entre otras.}$$

Otras ecuaciones lineales que no pueden modelarse directamente sobre la balanza son aquellas que dan lugar a soluciones negativas. Por esta razón es conveniente que este tipo de ecuaciones se traten cuando los alumnos hayan traducido totalmente el modelo de la balanza a las operaciones con ecuaciones y ya no necesiten recurrir al modelo concreto, o esperar a que hayan desarrollado las ideas de transposición de términos.

En todo caso esta fase del aprendizaje de las ecuaciones lineales es fundamental para todo el desarrollo posterior del álgebra y el tiempo que se le consagre podrá recuperarse después.

El profesor decidirá el momento conveniente para introducir las ecuaciones con coeficientes decimales sencillos y las que tienen soluciones negativas.

Ecuaciones con paréntesis

Para preparar el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, es conveniente que los alumnos practiquen y resuelvan algunos casos sencillos de ecuaciones con paréntesis.

Por ejemplo

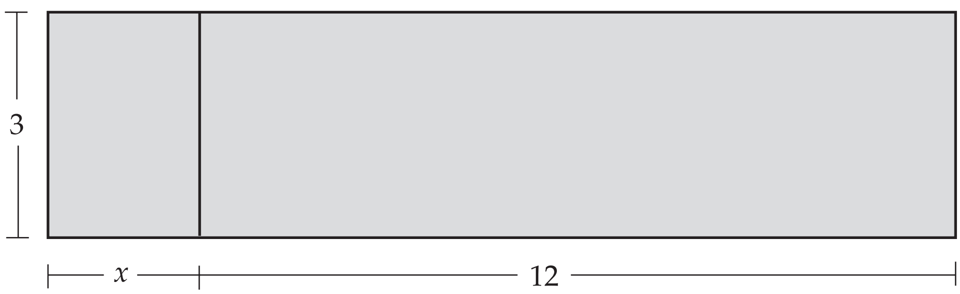
1. Para cada caso encuentra el valor de x.

a) $10x = 3(x + 1)$ | *b*) $2(4x + 7) - 3(x + 2) = 18$
c) $9x + 2(3x - 4) = 37$ | *d*) $4(3x - 2) = 2(3x - 5) + 20$

Situaciones geométricas como las siguientes permiten construir con facilidad problemas que conducen a ecuaciones con paréntesis.

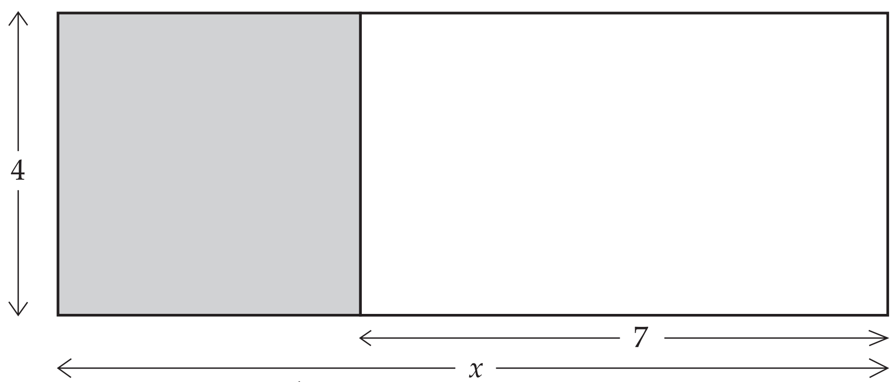
2. Encontrar en cada caso el valor de x.

a) $3(x + 12) = 48$ $\qquad x = ?$



Área sombreada = 48

b) $4(x - 7) = 52$ $\qquad x = ?$



Área sombreada = 52

En problemas como los anteriores las propiedades del área podrán aprovecharse para que los alumnos visualicen equivalencias como:

$$3(x + 12) = 3x + 36 \qquad 4(x - 7) = 4x - 28$$

a partir de las cuales las ecuaciones originales pueden reescribirse en la forma:

$$3x + 36 = 48 \qquad 4x - 28 = 52$$

Problemas como los siguientes también dan lugar a ecuaciones con paréntesis:

3. Encontrar tres números consecutivos tales que al sumar el primero más el doble del segundo más el triple del tercero se obtenga como resultado 86.

4. Un señor de 45 años tiene un hijo de 7. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el triple de la del hijo? ¿Y el doble?

5. En una tlapalería me venden la lata de pintura \$31 más barata que en otra, de tal manera que con la misma cantidad de dinero, en la primera tlapalería puedo comprar cinco latas mientras que en la otra sólo puedo comprar cuatro. ¿A cuánto me dan la lata de pintura en la primera tienda?

El estudio de las ecuaciones lineales se completa y enriquece en tercer grado, donde se verán los procedimientos para eliminar los denominadores en las ecuaciones con coeficientes fraccionarios, así como ejemplos de ecuaciones que se traducen a lineales, previas transformaciones algebraicas.

Por ejemplo

a) $\dfrac{4}{3x - 2} = \dfrac{5}{6x + 2}$

b) $\dfrac{3x + 2}{2x - 2} = 2$

c) $\dfrac{2x - 1}{x + 4} = \dfrac{6x - 3}{3x + 2}$

d) $(x - 3)^2 - (x + 1)^2 = 4$

Sistemas de ecuaciones lineales

La enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales debe empezar con problemas sencillos, donde las ecuaciones que resulten no pongan a prueba la habilidad de los estudiantes para operar con expresiones algebraicas. Es mejor que se apropien gradualmente de las nociones de ecuaciones simultáneas y sustitución algebraica, que intentar enseñar desde el principio todos los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Los casos más sencillos de dos ecuaciones simultáneas son aquellos en los que una de las incógnitas aparece despejada en términos de la otra, es decir, son de la forma:

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ y = Dx \end{cases}$$

Para resolver estos sistemas, es suficiente sustituir Dx en el lugar de y en la primera ecuación; luego se resuelve la ecuación lineal que resulta.

Por ejemplo

1. Juanita compró cinco cuadernos y cuatro plumones y gastó en total \$ 105. Si cada cuaderno le costó el doble que cada plumón ¿Cuánto le costó cada cuaderno y cada plumón? □

Es importante que los sistemas de ecuaciones se introduzcan mediante problemas. Así, los alumnos podrán ver que en algunos problemas no hay sólo una, sino varias incógnitas y entiendan que estos problemas se traducen por lo general en varias ecuaciones (condiciones), por lo que para resolverlos hay que encontrar los valores que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones. Sin la ayuda de problemas es muy difícil que los alumnos comprendan por qué en un sistema de dos ecuaciones, las incógnitas x e y representan los mismos valores en ambas ecuaciones y, por lo tanto, que comprendan el principio de sustitución y las otras nociones asociadas a la solución de sistemas de ecuaciones.

Quizá lo anterior quede más claro por medio de un ejemplo. Cuando se pide a los alumnos que resuelvan ecuaciones lineales como las siguientes:

$$3x + 4 = 16 \qquad\qquad 7x - 3 = 11$$

se espera que adviertan que la x no necesariamente representa el mismo valor en las dos ecuaciones y que las resuelvan por separado. En cambio, cuando se les propone que resuelvan un sistema de ecuaciones como:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + y = 14 \end{cases}$$

deberán comprender que no se trata de dos ecuaciones independientes, sino que las incógnitas x e y se refieren a los mismos valores en ambas ecuaciones, pues de este hecho depende el principio de sustitución. Esta restricción se entiende mejor al resolver problemas —donde las incógnitas se refieren a cantidades bien determinadas, aunque desconocidas que en el contexto de la solución de sistemas abstractos, donde las incógnitas sólo representan números desconocidos y la restricción de que éstos deben satisfacer ambas ecuaciones se impone externamente, sin el apoyo que proporciona la situación de un problema.

Los alumnos deben tener la oportunidad de explorar y construir tablas que les permitan resolver sistemas de ecuaciones sencillos . Los sistemas que resulten no tienen necesariamente que ser lineales, sino que también podrán resolverse problemas como los que se presentan a continuación. En particular, los problemas sobre números brindan un contexto familiar y muy simple para que los alumnos se acostumbren al concepto de ecuaciones simultáneas.

1. Encontrar dos números cuya suma sea 20 y cuyo producto sea 96.

Para resolver este problema, se puede construir una tabla como la siguiente.

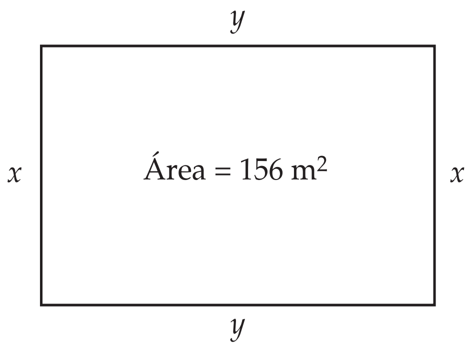
x	y	$x + y$	xy
19	1	19 + 1	19
18	2	18 + 2	36
17	3	17 + 3	51
16	4	16 + 4	64
15	5	15 + 5	75
14	6	14 + 6	84
13	7	13 + 7	91
12	8	12 + 8	96 ← Solución

Donde se ve que los números buscados son 12 y 8.

2. ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno cuyo perímetro es 50 m y cuya área es 156 m^2?

Perímetro: $2x + 2y = 50$ m

Área: $xy = 156$ m^2



En el tercer grado los alumnos seguirán practicando el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2. Se introducirán además los otros métodos: igualación, suma y resta y el método gráfico, así como algunos ejemplos de resolución de sistemas 3×3 utilizando el método de eliminaciones sucesivas. La idea es que los alumnos puedan comparar diversos métodos y decidan, según los casos que se les presenten, cuál es más cómodo emplear.

Es conveniente que se sigan planteando problemas para que los alumnos consoliden su comprensión de las relaciones entre los datos y las incógnitas de un problema. Por ejemplo, en los siguientes problemas la relación entre las incógnitas está dada explícitamente en el primer problema, mientras que en el segundo permanece implícita.

3. *En una función de teatro, los boletos de adulto se vendieron a \$30 y los de niño a \$25. Si se vendieron 100 boletos más de niño que de adulto y en total se recaudaron \$4 700. ¿Cuántos boletos de niño y cuántos de adulto se vendieron?*

4. *A un baile asistieron 270 personas. Si los boletos de caballero costaban \$100 y los de dama \$8 y se recaudaron \$24 800 por todas las entradas, ¿cuántas mujeres y cuántos hombres asistieron al baile?*

Sin embargo, en el lenguaje del álgebra es necesario que la relación entre las incógnitas siempre quede explícita:

Para el primer problema

$$\begin{cases} 30x + 25y = 4\,700 \\ y = x + 100 \end{cases}$$

Para el segundo problema

$$\begin{cases} 100x + 80y = 24\,800 \\ x + y = 270 \end{cases}$$

Con el propósito de ampliar la experiencia del alumno respecto a un mismo concepto, se introduce la graficación de las ecuaciones lineales simultáneas y el análisis gráfico de sus soluciones. Se intenta que el alumno aprecie las ventajas de un tipo de representación respecto a otra, dependiendo de los aspectos del sistema que quieran estudiarse. Por lo general la versión gráfica resalta los aspectos cualitativos de las soluciones del sistema, mientras que la resolución algebraica permite el cálculo preciso de las mismas.

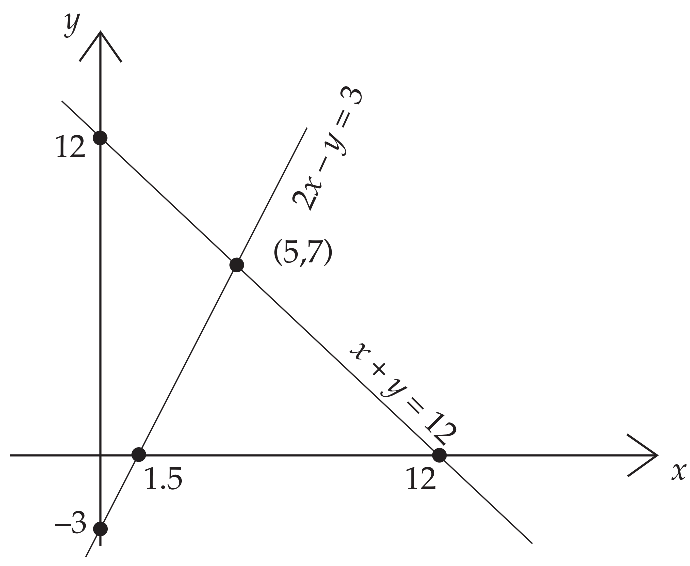
La presentación del método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2, deberá estar precedida por actividades para que los alumnos se familiaricen con la representación gráfica de la solución de ecuaciones de la forma $ax + by = c$ y sepan que se trata de rectas. Estas actividades se contemplan en las partes del programa dedicadas al estudio de la representación en el plano cartesiano de las regiones y subconjuntos del plano que satisfacen condiciones algebraicas sencillas, así como a la graficación de funciones de la forma $y = ax + b$, que trataremos más adelante.

La representación gráfica de un sistema de ecuaciones dará al profesor la oportunidad de examinar con sus alumnos los diferentes casos que pueden presentarse al resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2.

Caso 1. Solución única. Las ecuaciones representan dos rectas que se intersecan en un solo punto.

Por ejemplo

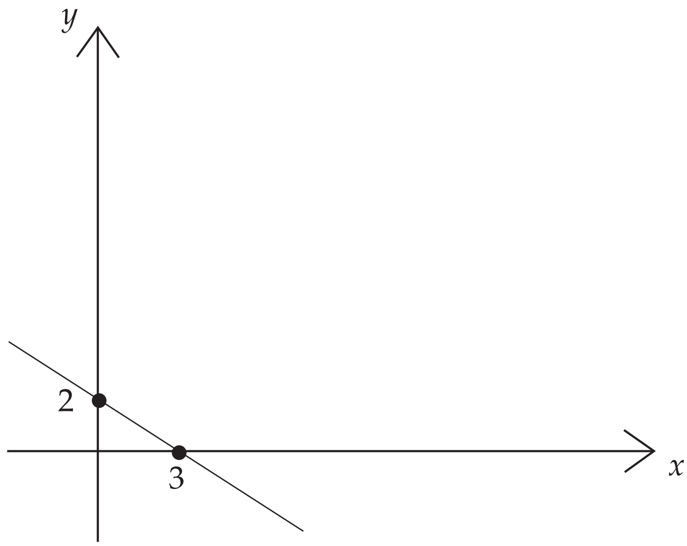
1. $$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 12 \end{cases}$$



Caso 2. Un número infinito de soluciones. Las dos ecuaciones representan la misma recta, por lo que todos los valores de las incógnitas que satisfacen una ecuación también satisfacen la otra.

Por ejemplo

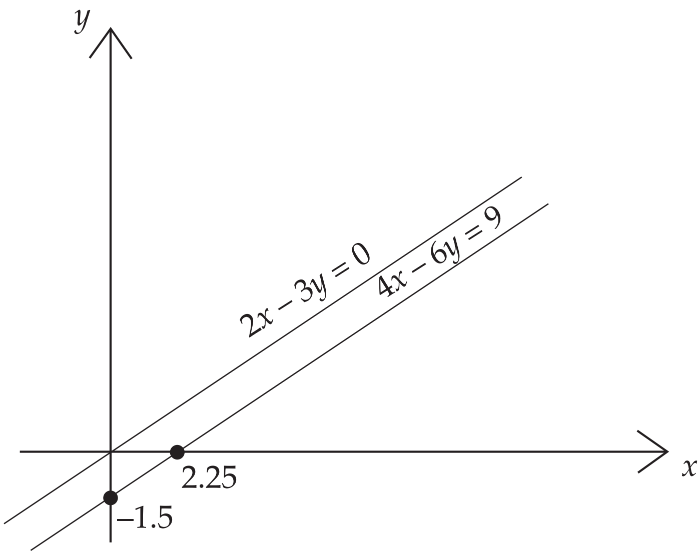
2. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$



Caso 3. Ninguna solución. Las dos ecuaciones representan rectas paralelas que no se intersectan en ningún punto.

Por ejemplo

3. $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 4x - 6y = 9 \end{cases}$



Plano cartesiano y funciones

Regiones y conjuntos de puntos en el plano

El plano cartesiano se introduce de manera informal desde el primer grado, por medio de diversas actividades como son, entre otras, la representación gráfica de los datos de una tabla y las gráficas de variación proporcional entre dos cantidades. En el segundo y tercer grados se concede importancia a que los alumnos localicen en el plano cartesiano las regiones y conjuntos de puntos que satisfacen algunas condiciones algebraicas dadas. En el segundo grado se localizarán regiones y subconjuntos que satisfagan condiciones sencillas.

Conviene iniciar con problemas, en los que las condiciones no estén dadas algebraicamente, sino en el lenguaje natural:

Por ejemplo

1. *Localizar los puntos cuya abscisa es menor que 5 (o cuya ordenada es mayor que –3).*

2. *Localizar los puntos cuya abscisa es mayor que –1 y cuya ordenada es menor que 3.*

3. *Localizar los puntos cuya abscisa es 5 (o el doble de su ordenada, o cuya ordenada se obtiene restando 3 al doble de la abscisa, etcétera).*

4. *Localizar los puntos tales que la suma de sus coordenadas es 8 (o el producto es 60, etcétera).*

Posteriormente se pueden proponer planteamientos más abstractos.

Por ejemplo

Semiplanos
5. Represente en el plano cartesiano todos los puntos que cumplan con las siguientes condiciones:

a) $x > 3$
b) $y < -2$
c) $x < y$
d) $x > 2y$

Franjas
6. Representen en el plano cartesiano todos los puntos que cumplan con las siguientes condiciones:

a) $2 < x < 5$
b) $-3 < y < 0$

Rectas
7. Representen en el plano cartesiano todos los puntos que cumplan con las siguientes condiciones:

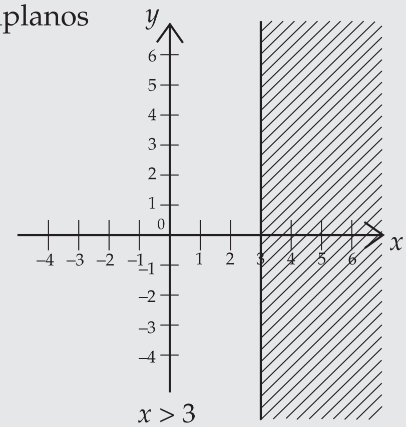
a) $x = y$
b) $y = -5$
c) $x + y = 15$
d) $y = 2x$

Cuadrantes
8. Representen en el plano cartesiano todos los puntos que cumplan con las siguientes condiciones:

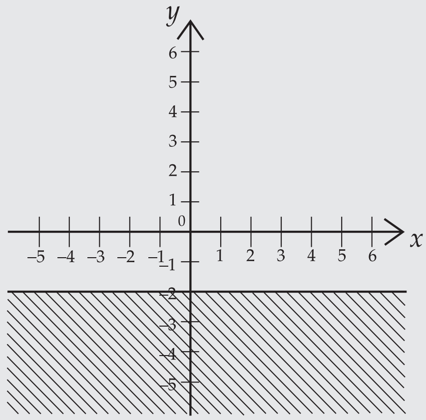
a) $xy < 0$
b) $xy > 0$,…

REGIONES Y CONJUNTOS DE PUNTOS EN EL PLANO

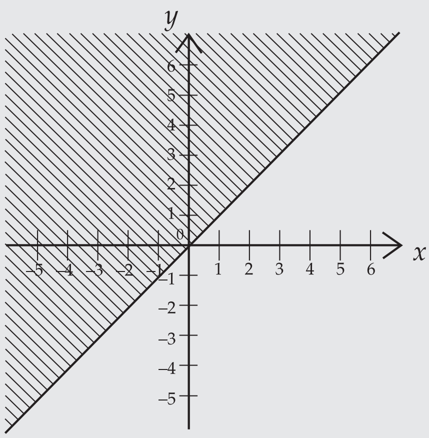
Semiplanos



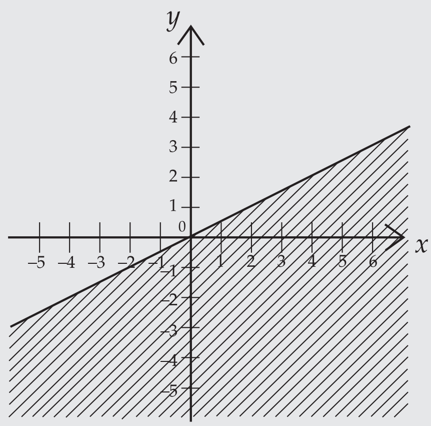
$x > 3$



$y < -2$

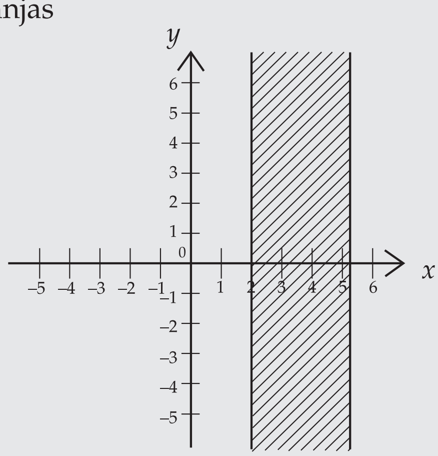


$x < y$

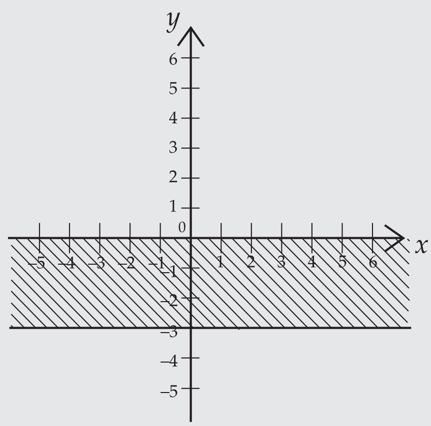


$x > 2y$

Franjas

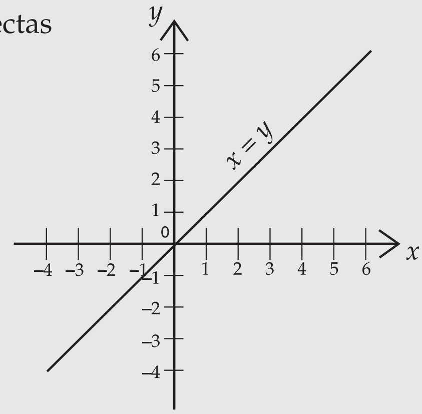


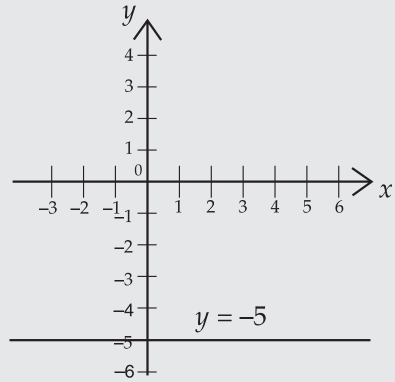
$2 < x < 5$

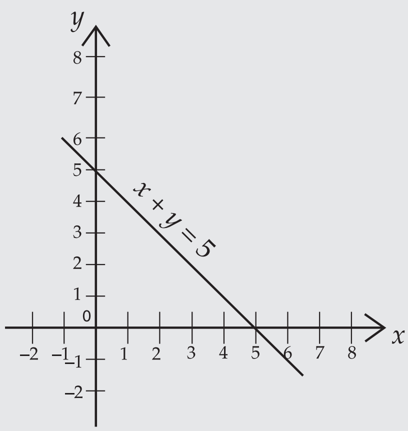


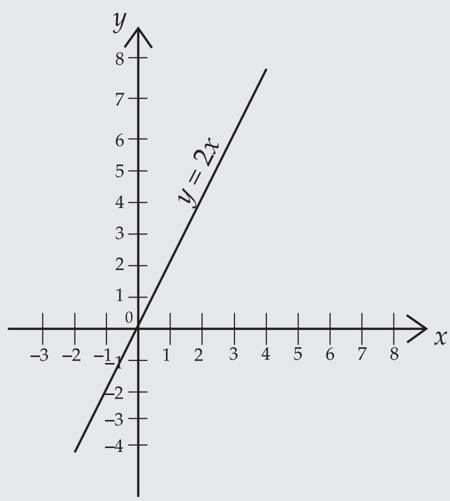
$-3 < y < 0$

Rectas

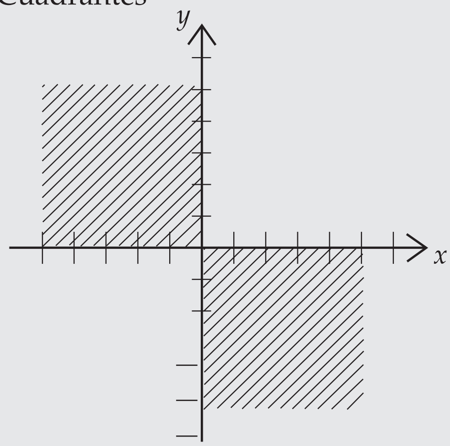




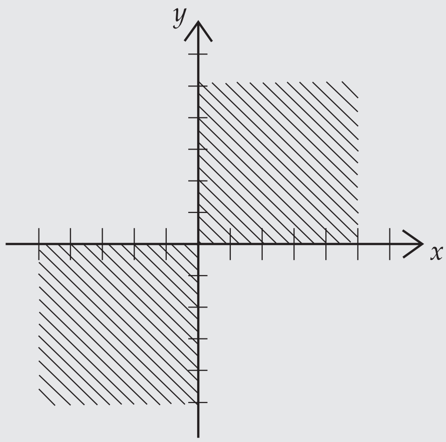




Cuadrantes



$x\,y < 0$



$x\,y > 0$

En tercer grado podrá avanzarse hacia situaciones menos sencillas como son, por ejemplo, rectas de las formas $ax + by = c$ y algunos casos sencillos de sistemas con dos desigualdades lineales.

Por ejemplo

1. Representen en el plano cartesiano los puntos que cumplan con las siguientes condiciones:

$$a)\ y - 3x = 5$$

El propósito no es introducir los procedimientos algebraicos para resolver desigualdades o sistemas de desigualdades lineales, sino enriquecer el significado de las expresiones algebraicas mediante su representación en el plano cartesiano.

Si se pide a los alumnos que localicen los puntos que satisfacen $y - 3x = 5$, deben tener la oportunidad de encontrar mentalmente algunos valores y desarrollar sus propios procedimientos, pues si desde el principio se les enseña a encontrar valores despejando una de las variables y asignando valores a la otra, se pierde el objetivo pedagógico de la actividad.

Funciones y sus gráficas

Es recomendable que desde el primer grado los alumnos comiencen a familiarizarse con las funciones mediante actividades muy diversas. Al principio no es conveniente tratar de precisar el significado del término *función.* Es preferible esperar hasta el tercer grado o el bachillerato, cuando se hayan estudiado diversas situaciones, que les permitan comprender las funciones como una relación entre dos cantidades, o como la expresión de una cantidad en términos de otra.

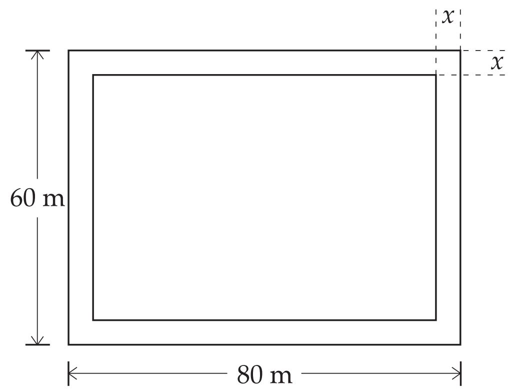
Las actividades en clase deberán plantearse de manera que los alumnos puedan darse cuenta del poder y la utilidad de las funciones para describir y modelar fenómenos del mundo real, de la física, la geometría,la economíay otros contextos.

Por ejemplo

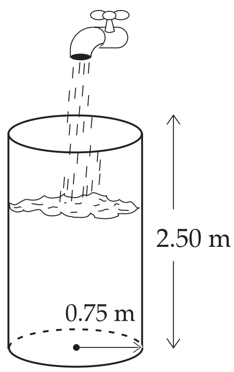
1. Un agente de ventas recibe dos ofertas de empleo de una misma compañía: un salario base mensual de $1500 más 8% de comisión sobre las ventas, o bien 15% de comisión sobre las ventas, sin salario base. Escribe en cada caso una fórmula para indicar cómo dependen los ingresos del agente de las ventas que realiza. Construye una tabla para comparar los ingresos posibles en cada caso; por ejemplo, ¿cuánto recibe en cada caso si vende 10 000, 20 000, 30 000, 40 000... pesos? ¿En qué caso le conviene aceptar una u otra oferta?

2. Una pequeña fábrica de yogur produce 25 000 "cuartitos" de su producto semanalmente. La ganancia neta por cada cuartito que se vende es de 40¢ mientras que los que no se venden se desechan con una pérdida de 75¢ por cuartito. Escribe la fórmula que expresa la ganancia de la fábrica en términos del número de cuartitos vendidos.

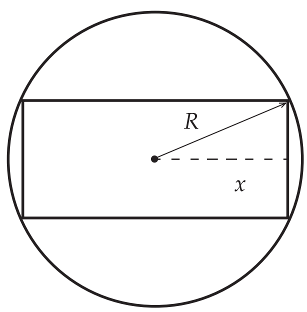
3. Alrededor de un terreno que mide 60 m × 80 m se quiere construir una banqueta, tal y como se indica en la figura. Expresar el área de la banqueta en términos de x. Si el metro cuadrado de banqueta tiene un costo de $55, expresa el costo de toda la banqueta en términos de x. ¿Cuál será el costo de una banqueta de 1.50 m, 1.75 m, 2.00 m, 2.50 m,... de ancho?



4. Un tinaco cilíndrico de 0.75 m de radio y 2.50 m de altura se llena a razón de 500 *l* de agua por hora. ¿Cuál es la fórmula que expresa la altura que alcanza el agua en el tinaco en términos del tiempo transcurrido desde que empezó a llenarse? ¿Cuánto tarda en llenarse? (Supóngase que el chorro de agua es constante).



5. Escribe el área del rectángulo inscrito en el círculo en términos de R y x.



6. En los países de habla inglesa la temperatura se mide en grados Farenheit (°F) y no en grados Celsius o centígrados (°C) como lo hacemos nosotros. En la siguiente tabla están dadas, para algunos valores de la temperatura, las equivalencias entre los grados Celsius y Farenheit.

°C	°F
–30	–22
–20	–4
–10	14
0	32
10	50
20	68
30	86

a) Representa gráficamente los valores de la tabla y utiliza la gráfica que obtienes para convertir las siguientes temperaturas de una escala a otra.

–15°C, 5°C, 100°C, –50°F, 0°F, 100°F

b) Encuentra una fórmula para pasar de grados centígrados a Farenheit y otra para pasar de Farenheit a centígrados. ¿Para qué temperatura la escala centígrada y Farenheit marcan lo mismo?

7. Si lanzamos hacia arriba un proyectil con una velocidad inicial V_0 (en metros por segundos), la altura que alcanza al cabo de 1, 2, 3, ... segundos está dada por la fórmula:

$$h = V_0\, t - 4.9t^2$$

donde h representa la altura alcanzada (en metros) y t el tiempo (en segundos) transcurrido desde el lanzamiento.

a) Construye una tabla donde aparezca la altura que alcanza al cabo de 1, 2, 3,... segundos un proyectil que se lanza con una velocidad inicial de 50 metros por segundo. ¿En qué momento alcanza su altura máxima? ¿Cuánto tarda en volver a bajar?

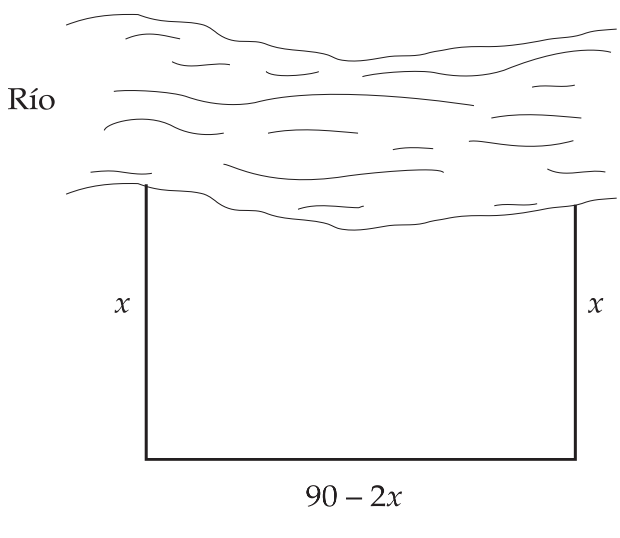
b) Explora lo que ocurre para otros valores de la velocidad inicial, por ejemplo, $V_0 = 10, 20, 30,...$ metros por segundo y construye una tabla donde aparezca el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar su altura máxima para cada una de estas velocidades de lanzamiento. Representa gráficamente los valores de esta tabla y escribe la fórmula que relaciona la velocidad inicial de lanzamiento y el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar su altura máxima. □

Detrás de muchas de las aplicaciones importantes de las funciones subyace la idea de variación; la idea de una cantidad que varía al cambiar los valores de otra. A diferencia de las ecuaciones, donde lo importante es encontrar su solución (o soluciones), en las funciones se trata de estudiar su comportamiento, ya sea a través de una tabla de valores o de su gráfica. Por ello es necesario que se propongan actividades y problemas que conduzcan a los alumnos a elaborar tablas y gráficas a partir de la expresión algebraica de una función y, en casos sencillos, a buscar la expresión algebraica que corresponde a una tabla o a una gráfica. De esta manera se acostumbrarán y comprenderán mejor la utilidad de las diversas formas de presentar una función.

El siguiente problema ilustra una situación que puede resolverse numéricamente con la ayuda de una tabla y una gráfica.

Un problema de máximos

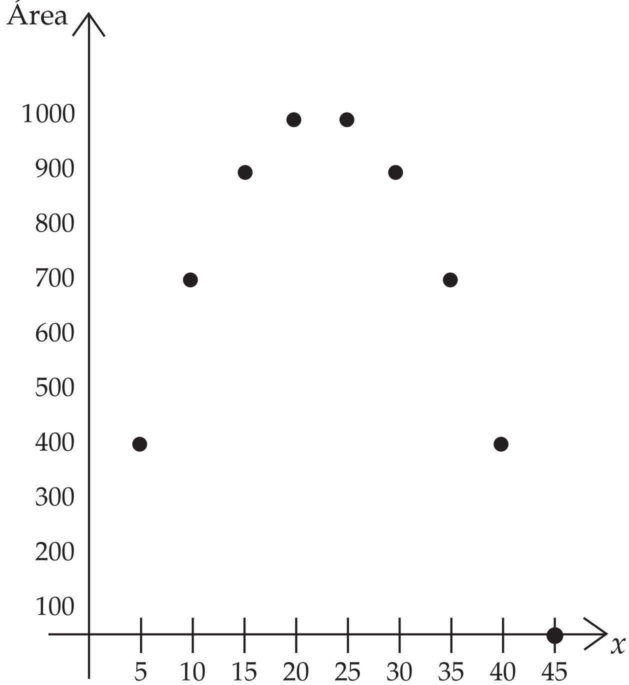
1. Se va a cercar una parte de un terreno que colinda con un río y sólo se dispone de material para construir 90 m de barda. Si se quiere que la parte cercada tenga forma rectangular, ¿cuáles serán las dimensiones del terreno de mayor área que se puede bardar?



Como primer paso, los alumnos podrán obtener la fórmula que expresa el área del terreno en términos de sus lados x y $90 - 2x$ y utilizarla para elaborar una tabla con algunos de los valores posibles del área. En este caso no conviene asignar a x los valores 1, 2, 3, ... sino que es preferible darle valores más espaciados entre sí, por ejemplo, $x = 5, 10, 15,...$

A continuación pueden representarse los valores de la tabla en un sistema de ejes coordenados y utilizar la gráfica que se obtiene para estimar algunos valores del área que no aparecen en la tabla. Gracias a la simetría de la tabla y de la gráfica, los alumnos podrán darse cuenta de que el área del terreno es máxima cuando sus lados miden 22.5 m y 45 m, respectivamente (conviene que al resolver el problema se exploren los valores del área correspondiente a valores de x entre 20 m y 25 m). □

x	$90 - 2x$	Área = $x(90 - 2x)$
5	80	400
10	70	700
15	60	900
20	50	1000
25	40	1000
30	30	900
35	20	700
40	10	400
45	0	0



El estudio del comportamiento de una función se enriquece si al tabular se agregan columnas adicionales para registrar cómo se incrementan los valores de las variables. La observación de esta columna permitirá en muchos casos simplificar la elaboración de la tabla y desarrollar criterios para pasar de una tabla o una gráfica a la expresión algebraica de la función, aunque en la secundaria sólo se darán los primeros pasos en esta dirección. En particular, es importante que al estudiar las funciones lineales los alumnos relacionen lo que observan en la columna de incrementos con el aspecto de las gráficas que se obtienen.

Por ejemplo

1. Utiliza lo que observas en la tercera columna de la tabla para completarla.

x	x^2	$\Delta\, x^2$
0	0	
1	1	+1
2	4	+3
3	9	+5
4	16	+7
5		
6		
7		
8		
9		
10		

La observación de los incrementos permite encontrar un modo fácil de continuar la tabla de cuadrados.

En algunos casos es interesante agregar otra columna para registrar los segundos incrementos o diferencias, es decir, los incrementos de los incrementos.

Por ejemplo

2. La siguiente tabla muestra la distancia recorrida al cabo de 0, 1, 2, 3,... segundos por un cuerpo que se deja caer en el vacío desde el reposo:

- En la columna ΔE aparecen las diferencias entre dos valores sucesivos del espacio recorrido.

- En la columna Δ^2E aparecen las diferencias entre dos valores sucesivos de la columna ΔE.

Completa las columnas. ¿Qué se puede concluir de los valores que se obtienen en las columnas Δ E y Δ^2E? (*Sugerencia:* calcula la velocidad y la aceleración promedio para cada intervalo de un segundo.)

T (TIEMPO) (SEG)	E (ESPACIO) RECORRIDO (METROS)	Δ E	Δ^2 E
0	0		
1	4.9	+4.9	
2	19.6	+14.7	+9.8
3	44.1	+24.5	+9.8
4	78.4		
5	122.5		
6	176.4		
7			
8			
9			
10			

Funciones recursivas

La popularización de las computadoras ha hecho que los tratamientos numéricos de ciertas situaciones y problemas resulten accesibles y, por lo tanto, que las funciones definidas recursivamente se vuelvan muy importantes.

Por esto conviene que haya actividades para que los alumnos conozcan este tipo de funciones. Por ejemplo, al momento de estudiar el método babilónico para calcular raíces cuadradas se puede introducir o pedir a los alumnos que encuentren la fórmula de recurrencia correspondiente:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + N}{2x_n} \end{cases}$$

Por ejemplo

1. En 1997, la población de la República Mexicana era de alrededor de 94 millones de habitantes y crece a una tasa del 1.8% anual aproximadamente. ¿Cuál fue la población al cabo de 1, 2, 3, ... años?

Si llamamos P_0 a la población actual y P_1, P_2, P_3,... a la población al cabo de 1, 2, 3,... años, entonces tenemos:

$$P_0 = 94 \text{ (millones de habitantes)}$$

$$P_1 = 94 + 0.018 \times 94 = P_0 + 0.018 \times P_0 = (1 + 0.018)P_0 = (1.018)P_0$$

$$P_2 = P_1 + 0.018 \times P_1 = (1 + 0.018)P_1 = (1.018)P_1$$

$$P_3 = P_2 + 0.018 \times P_2 = (1 + 0.018)P_2 = (1.018)P_2$$

En general, se tiene la fórmula de recurrencia

$$P_{n+1} = (1.018)P_n$$

En situaciones como éstas es posible pasar con facilidad de una fórmula de recurrencia a una fórmula cerrada, es decir, una fórmula que sirve para calcular el valor de la función a partir sólo del valor de *n*, sin necesidad de conocer o calcular previamente los valores anteriores.

Sustituyendo la expresión para P_1 en la expresión para P_2 se obtiene:

$$P_2 = (1.018)^2 P_0$$

Sustituyendo esta expresión en la expresión para P_3, se obtiene luego:

$$P_3 = (1.018)^3 P_0$$

Y en general se tiene la fórmula cerrada

$$P_n = (1.018)^n P_0$$

o sea, la población al cabo de n años está dada por:

$$P_n = (1.018)^n \times 94 \text{ (millones de habitantes)}$$

Aplicando la fórmula anterior se encuentra que en 1998 se supone que fuimos alrededor de 95.69 millones de mexicanos; en 1999, 97.41 millones, en 2001, 100.95 y así sucesivamente si no aumenta o disminuye la tasa de crecimiento de la población (lo interesante surge cuando utilizamos la fórmula para saber cuántos seremos dentro de 10, 25, 50,... años).

2. Considera la siguiente fórmula de recurrencia.

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_1 = b \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2} \end{cases}$$

Calcula varios valores tomando $a = 1$ y $b = 2$. Haz lo mismo tomando $a = 2$ y $b = 1$. Ensaya con otros valores y comenta con tu profesor y compañeros lo que observas.

3. Una caja de ahorros ofrece un interés de p% mensual. Una persona deposita N pesos todos los meses. ¿Cuánto tendrá ahorrado al cabo de 1, 2, 3, ... meses?

Si llamamos A_0 al depósito inicial y A_1, A_2, A_3, ... a lo que tiene ahorrado al cabo de 1, 2, 3, ... meses, la fórmula de recurrencia es:

$$\begin{cases} A_0 = N \\ A_{n+1} = (1 + p)A_n + N \end{cases}$$

Como se dijo anteriormente, las primeras actividades tendrán por objeto que los alumnos estén en contacto con la idea de recurrencia y la incorporen a su experiencia. Más adelante, dependiendo de su madurez matemática, podrán escribir y utilizar las fórmulas correspondientes. Deberá tenerse en cuenta que, por lo general, les toma tiempo acostumbrarse y comprender el uso de subíndices.

Graficación de funciones

Una vez que los alumnos estén acostumbrados a las funciones y sus gráficas como una forma de modelar o describir fenómenos del mundo real, se les puede proponer situaciones que requieran la construcción de gráficas de funciones matemáticas abstractas como son, por ejemplo, las funciones lineales y cuadráticas $y = ax + b$ e $y = ax^2 + bx + c$ y algunos casos sencillos de funciones racionales de la forma:

$$y = \frac{a}{bx - c}$$

sin intentar avanzar mucho más allá de observar el comportamiento de la gráfica de:

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{alrededor de } x = 0$$

La mayoría de los problemas que se proponen en la enseñanza para que los alumnos aprendan a bosquejar la gráfica de una función, pueden resolverse aplicando el siguiente esquema básico de graficación "punto a punto":

- Se asignan valores a la variable independiente x y se sustituyen en la expresión de la función, para obtener los valores correspondientes de la variable dependiente y;
- Para cada pareja de valores (x, y) obtenida en la forma anterior, se localiza el punto correspondiente en un sistema de coordenadas cartesianas.

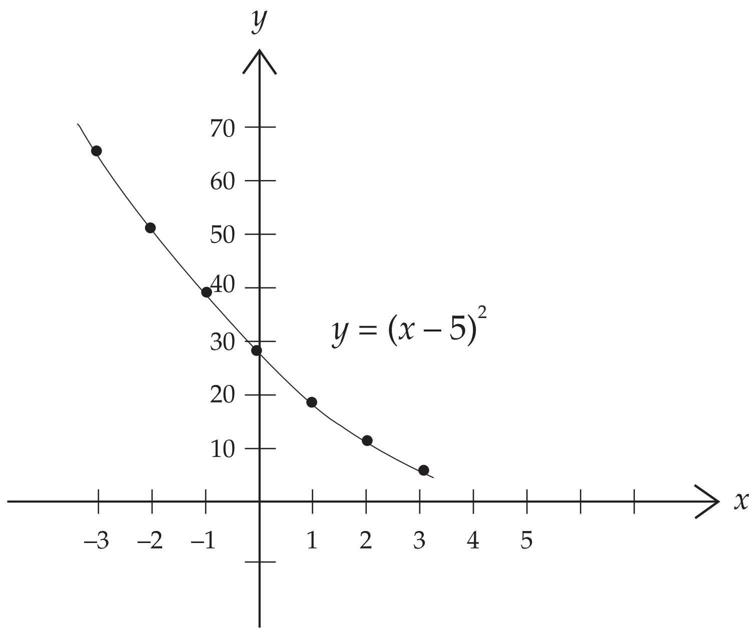
- Se unen los puntos anteriores mediante un trazo continuo para obtener un bosquejo de la gráfica de la función.

No obstante, los resultados de investigaciones muestran que las actividades que se limitan exclusivamente a la aplicación del esquema anterior son insuficientes para un buen aprendizaje. Muchos alumnos, aun de grados avanzados y con más experiencia en graficar funciones, siguen los pasos anteriores de manera automática y rutinaria, sin cuestionarse sobre el posible aspecto de la gráfica y su relación con la expresión algebraica de la función. Así, se limitan a asignar a la variable independiente valores enteros cercanos a 0, olvidando muchas veces tomar valores negativos y sin considerar valores fraccionarios o decimales.

Por ejemplo, cuando se les pide bosquejar la gráfica de la función:

$$y = (x - 5)^2$$

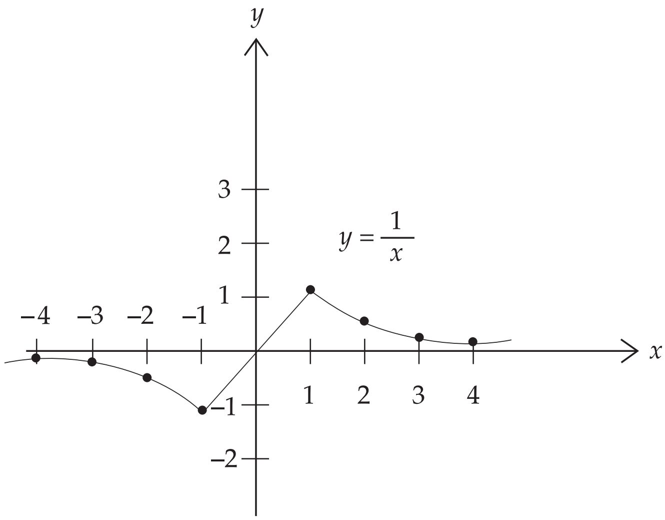
con frecuencia sólo sustituyen los valores $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3, sin explorar lo que ocurre para valores alrededor de $x = 5$, lo que da lugar a una representación deficiente, que no permite enterarse de la forma de la gráfica.



Cuando se les pide graficar la función:

$$y = \frac{1}{x}$$

se desconciertan o no saben que hacer cuando la x que aparece en el denominador toma el valor 0, por lo que muchas veces dan como respuesta una gráfica como la siguiente:



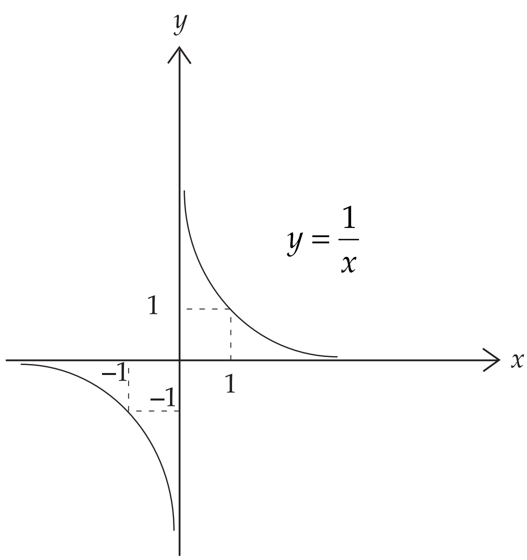
Para citar un último ejemplo, si se proporciona una lista de funciones de la forma $y = ax + b$ y las gráficas correspondientes en desorden, los alumnos tienen dificultades para encontrar la fórmula que corresponde a cada gráfica. Errores como los anteriores revelan las dificultades que tienen para visualizar el comportamiento de la gráfica de una función y relacionarlo con su fórmula. Cuando esto ocurre, las gráficas pierden su valor intuitivo y, al mismo tiempo, su utilidad para el aprendizaje de las matemáticas se ve disminuida o resulta nula.

Por ello es recomendable plantear actividades y problemas que rompan con los automatismos que acompañan el bosquejo de la gráfica de una función y conduzcan a los alumnos a interrogarse sobre sus rasgos principales y aspecto global, y sobre la forma como esto depende de la expresión algebraica de la función. Podrán, entre otras, proponerse actividades como las que siguen:

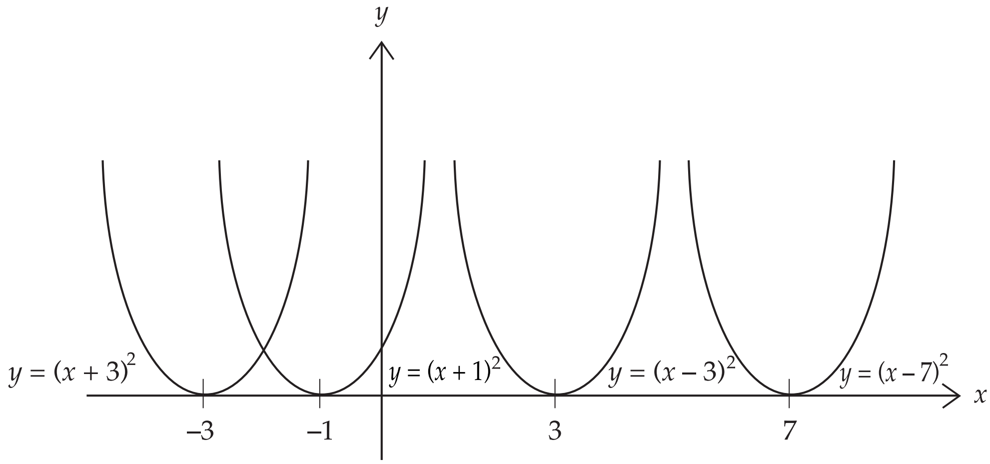
• Análisis local del comportamiento de funciones, por ejemplo:

1. Grafica las siguientes funciones:

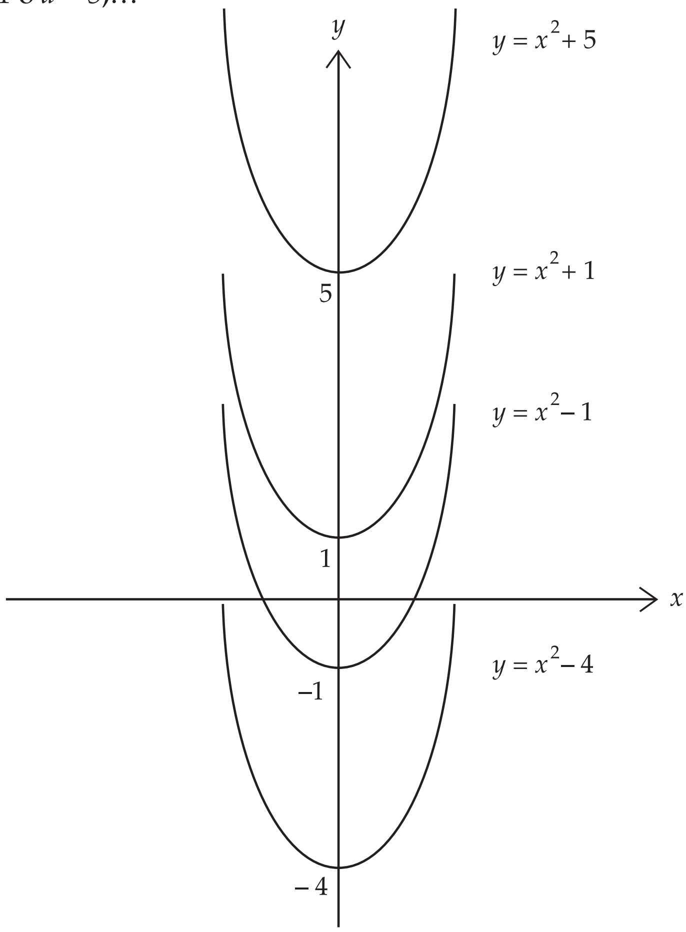
a) $y = \dfrac{1}{x}$ *alrededor de* $x = 0$



b) $y = (x - a)^2$ *alrededor de* $x = a$ *con,* $a = -3$ *o* $a = -1$ *o* $a = 3$ *o* $a = 7\ldots$



c) $y = x^2 + a$
alrededor de $x = 0$*, para* $a = -4$
o $a = -1$ o $a = 1$ o $a = 5,\ldots$



• Estudio de las gráficas de familias de la forma $y = ax + b$.

Por ejemplo

2. Bosquejar *en un mismo sistema de ejes coordenados* las gráficas de las funciones:

a) $y = -3x$
b) $y = -2x$
c) $y = -x$
d) $y = x$
e) $y = 2x$
f) $y = 3x$

3. Bosqueja en un mismo sistema de ejes coordenados las gráficas de las funciones:

a) $y = \frac{1}{2}x - 3$

b) $y = \frac{1}{2}x - 2$

c) $y = \frac{1}{2}x - 1$

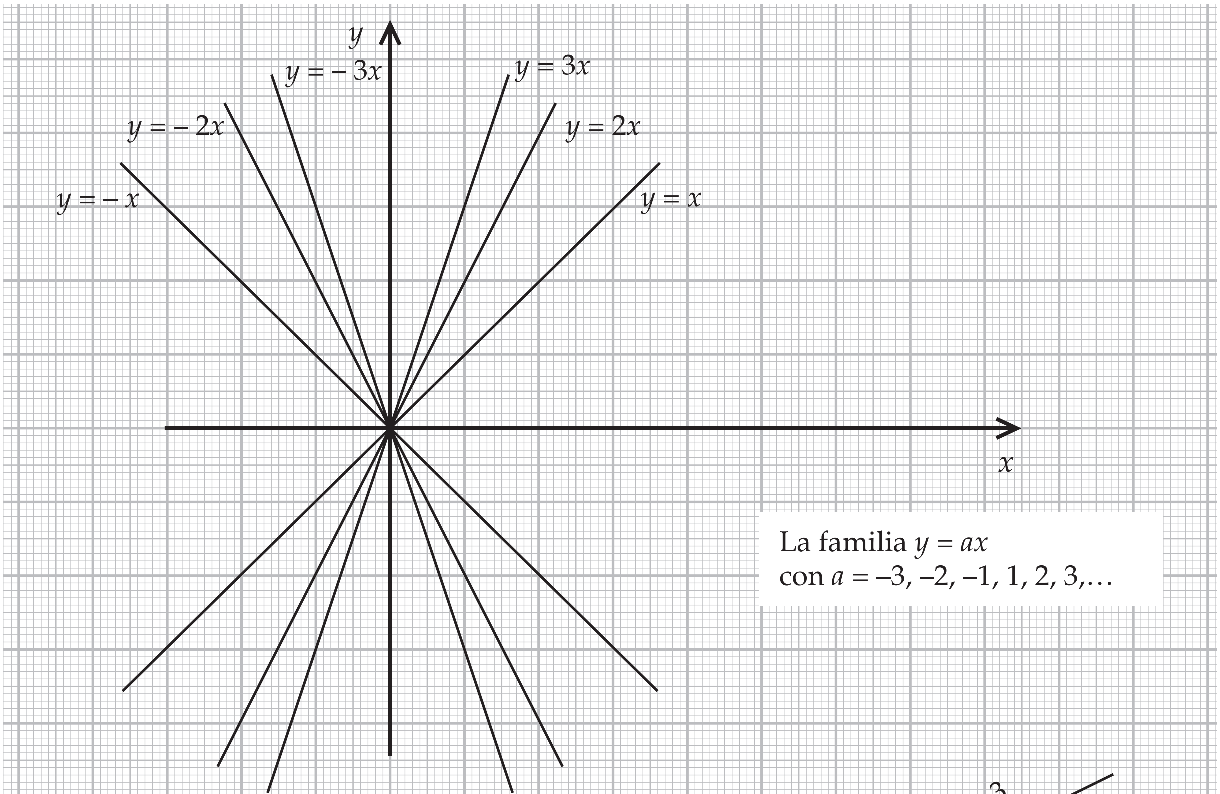
d) $y = \frac{1}{2}x$

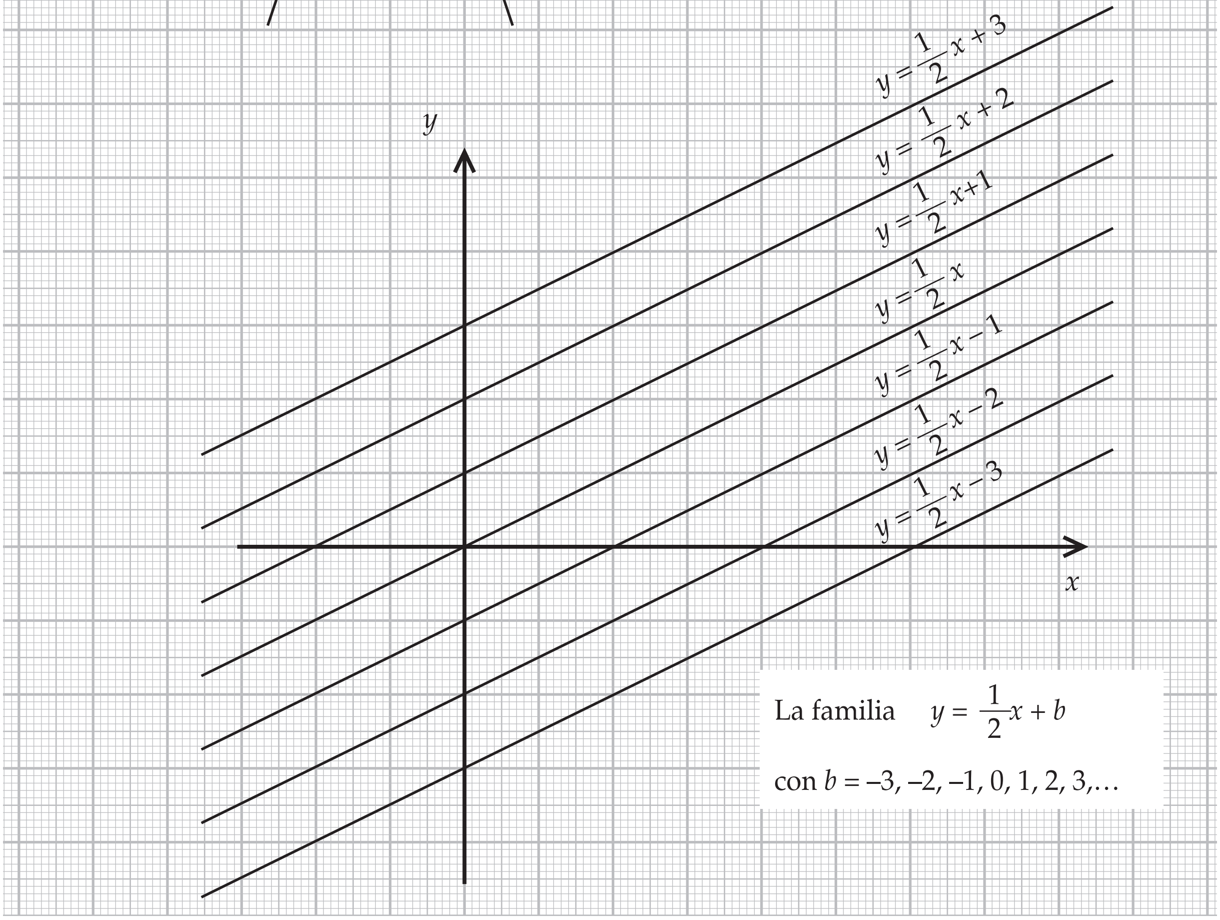
e) $y = \frac{1}{2}x + 1$

f) $y = \frac{1}{2}x + 2$

g) $y = \frac{1}{2}x + 3$

La idea de este último tipo de situaciones es dibujar las gráficas de funciones de la forma $y = ax + b$, manteniendo fijo el valor de uno de los parámetros (o coeficientes) y dándole valores distintos al otro. De esta manera se busca que los alumnos relacionen la inclinación y posición de las rectas que se obtienen con los valores de los parámetros a y b. Si cuentan con una calculadora graficadora podrán visualizar con mayor exactitud ese tipo de situaciones.


y
y = – 3x
y = 3x
y = – 2x
y = 2x
y = – x
y = x
x
La familia y = ax
con a = –3, –2, –1, 1, 2, 3,…


$y = \frac{1}{2}x + 3$
$y = \frac{1}{2}x + 2$
$y = \frac{1}{2}x + 1$
$y = \frac{1}{2}x$
$y = \frac{1}{2}x - 1$
$y = \frac{1}{2}x - 2$
$y = \frac{1}{2}x - 3$
y
x
La familia $y = \frac{1}{2}x + b$
con b = –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3,…

Operaciones con expresiones algebraicas

El álgebra no sólo es importante para que los alumnos comprendan otras partes de las matemáticas que se estudian en la educación secundaria, también los prepara para estudios más avanzados. Por ello es necesario que conozcan y se acostumbren a los diversos tipos de expresiones algebraicas que pueden presentarse, que comiencen gradualmente a operar con ellas y se familiaricen con el lenguaje utilizado para describirlas.

Los programas contemplan que se aprenda a operar con monomios, polinomios y expresiones racionales sencillas. Se buscará que las expresiones con radicales se conozcan por medio de actividades, realizando con ellas las operaciones necesarias para que los alumnos puedan enfrentar los problemas planteados en otras partes del curso como, por ejemplo, las aplicaciones del teorema de Pitágoras en la geometría.

El propósito es que en el segundo grado los alumnos comprendan y adquieran, poco a poco, seguridad y destreza en el manejo de monomios y polinomios, operando principalmente con expresiones lineales y cuadráticas, sin tratar de avanzar demasiado pronto hacia expresiones más complicadas, las cuales serán objeto de un estudio más detallado en grados posteriores. En este momento, los procedimientos que se consideran importantes son, sobre todo: la reducción de factores con base común en un monomio; la simplificación de términos semejantes en un polinomio y las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios.

En realidad, los alumnos comienzan a operar con monomios y polinomios desde que se introducen las primeras situaciones para ilustrar el uso de literales y las reglas de escritura algebraica, como son la expresión simbólica de los procedimientos para calcular perímetros y áreas. Estas situaciones pueden recuperarse y adaptarse con el objeto de proporcionar un apoyo intuitivo a las operaciones con polinomios, considerando, por ejemplo, que las dimensiones de las figuras guardan ciertas relaciones entre sí: ser la mitad o el doble, o bien el doble menos cinco unidades, o el doble menos la mitad, etcétera.

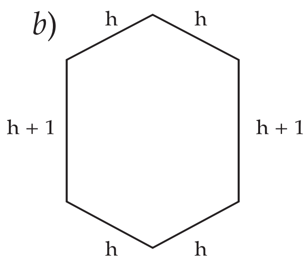
Por ejemplo

1. Expresar el perímetro de las siguientes figuras.

a)

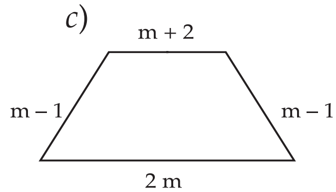
Perímetro =

b)



Perímetro =

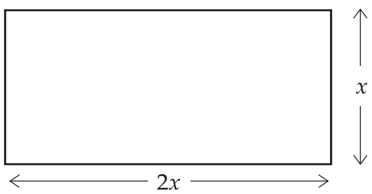
c)



Perímetro =

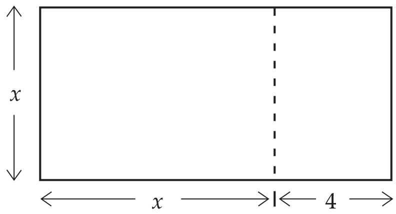
2. Expresar el área de las siguientes figuras.

a)



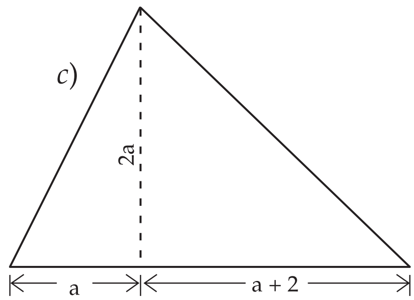
Área =

b)



Área =

c)



Área =

Situaciones como la que sigue también podrán servir para ilustrar la adición y sustracción de polinomios.

1. Una panadería elabora pasteles, algunos de los cuales no se venden el mismo día y dan lugar a pérdidas. Cada pastel que se vende produce x pesos de ganancia, mientras que los que no se venden producen una pérdida de y pesos. El sábado la pastelería vendió 75 pasteles y se quedaron 10 sin vender, y el domingo vendió 125 y quedaron 15 sin vender. ¿Cuál es la ganancia neta total obtenida por la venta de pasteles el sábado y el domingo?

Ganancia del sábado:	$75x - 10y$
Ganancia del domingo:	$125x - 15y$
Ganancia neta total:	$200x - 25y$

Es importante que las operaciones con polinomios no se presenten siempre en forma vertical; también conviene que haya ejercicios en forma horizontal para que los alumnos practiquen las reglas de eliminación de paréntesis en la adición y la sustracción y utilicen la propiedad distributiva al multiplicar polinomios. Estos son puntos donde los alumnos se equivocan con frecuencia, por lo que deberán tener la oportunidad de practicarlos.

Por otro lado, se deberán tener en cuenta las dificultades y falta de destreza de los alumnos para operar con fracciones y números con signo. Es recomendable, sobre todo al principio, plantear actividades de manera que estas dificultades no compliquen demasiado el aprendizaje y la aplicación de los procedimientos básicos del álgebra.

Las operaciones con números perdidos propuestas en el capítulo de aritmética podrán adaptarse para que los alumnos reflexionen sobre las operaciones con polinomios.

Por ejemplo

1. Encuentra los términos perdidos en cada operación:

a)
$$\begin{array}{rr} & 3x^2 - 5x + \square \\ + & 2x^2 + \square - 8 \\ \hline & \square + 2x - 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rr} & \square + 7x - 12 \\ + & -3x^2 + \square + \square \\ \hline & 3x^2 + 0 + 6 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rr} & 7x^2 - \square + 4 \\ - & \square - 3x - 8 \\ \hline & 5x^2 + 2x + \square \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rr} & 5x - 2 \\ \times & 3x + \square \\ \hline & \square - 14 \\ & \square - \square \quad \\ \hline & 15x^2 + \square + \square \end{array}$$

2. Encuentra en cada caso los términos perdidos:

a) $(5x^2 + \square + 2) + (\square + 2x + \square) = 3x^2 - 6x + 2$

b) $(\square + x + 11) + (-5x^2 + 3x + \square) = -3x^2 + \square - 6$

c) $(x^2 + \square + 8) - (\square + 3x - 2) = 3x^2 - 10x + \square$

d) $(\square)(2xy) = 6x^2y$

e) $(\square)(5x - 4) = 15x^2 - 12x$

f) $(2x - \square)(3x + \square) = \square - 3ax + 2bx - \square$

En el tercer grado se profundiza en las operaciones con polinomios. Al mismo tiempo, se avanza hacia la expresión simbólica de las operaciones con fracciones comunes, la cual podrá utilizarse para introducir las operaciones con expresiones racionales. Con este propósito, deberá tenerse presente que la comprensión de las fraccciones es importante para el estudio del álgebra, por lo que conviene verificar los conocimientos alcanzados en las fracciones y, de ser necesario, plantear actividades para que los alumnos recuperen la agilidad perdida y se avance hacia su adquisición definitiva.

Finalmente, es recomendable que los alumnos resuelvan diversos problemas que les permitan consolidar su destreza en el uso de procedimientos de despeje y sustitución algebraica.

Productos notables y factorización

Factorizar es uno de los procesos fundamentales del álgebra. De hecho, factorizar y encontrar las raíces de un polinomio son dos problemas equivalentes, es decir, si sabemos cómo factorizar un polinomio, podemos encontrar sus raíces. Recíprocamente, si conocemos las raíces de un polinomio podemos factorizarlo fácilmente.

La estrategia para enseñar a factorizar es que los alumnos se acostumbren a los productos notables:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$(x + a)\,(x - a) = x^2 - a^2$$

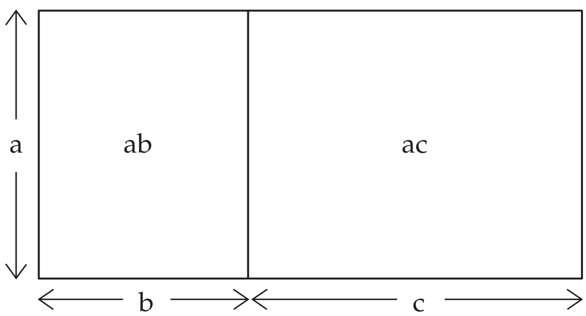
$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

y los apliquen para factorizar polinomios. Se enfatizará sobre todo la factorización de polinomios de segundo grado.

Conviene introducir los productos notables apoyándose en modelos que les den un soporte visual intuitivo.

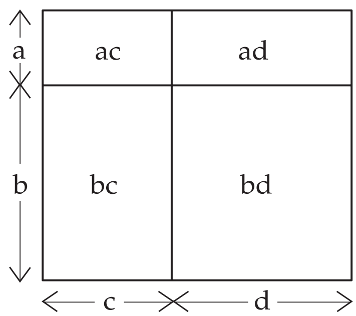
Por ejemplo

1.



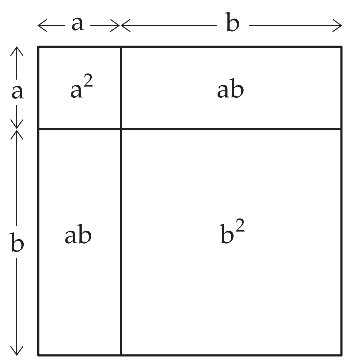
$a(b + c) = ab + ac$

2.



$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$

3.



$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Los alumnos necesitan adquirir destreza en la utilización de los productos notables, ya sea para desarrollar expresiones sencillas como las siguientes:

1) $(x + 3)^2 =$ *2)* $(2x + 3)^2 =$ *3)* $(x + 2)(x - 2) =$

4) $(x - 3)^2 =$ *5)* $(2x - 3)^2 =$ *6)* $(3x - 5)(3x + 5) =$

o bien para agilizar los cálculos en expresiones más complicadas:

7) $2x^2 + (3x + 1)^2 =$ *8)* $(2x + 1)^2 - (x - 3)^2 =$

9) $5x^2 - (2x - 2)(2x + 2) =$ *10)* $(5x - 3)^2 - (2x + 1)(2x - 1) =$

Las aplicaciones de los productos notables al cálculo numérico servirán al profesor para enriquecer y hacer más interesante su clase y a los alumnos para practicarlos y acostumbrarse a ellos.

Por ejemplo

$$a)\ 305^2 = (300 + 5)^2 = 300^2 + 2 \times 5 \times 300 + 5^2$$
$$= 90\,000 + 3\,000 + 25$$
$$= 93\,025$$

$$b)\ 1996^2 = (2\,000 - 4)^2 = 2\,000^2 - 2 \times 4 \times 2\,000 + 4^2$$
$$= 4\,000\,000 - 16\,000 + 16$$
$$= 3\,984\,016$$

$$c)\ 2.003^2 = (2 + 0.003)^2 = (2 + 3 \times 10^{-3})^2$$
$$= 2^2 + 2 \times 2 \times 3 \times 10^{-3} + (3 \times 10^{-3})^2$$
$$= 4 + 12 \times 10^{-3} + 9 \times 10^{-6}$$
$$= 4.012009$$

1. Calcula mentalmente 500^2 y ayúdate luego del cuadrado del binomio para calcular:

a) $501^2 =$
b) $502^2 =$
c) $503^2 =$
d) $510^2 =$

2. ¿Se te ocurre un procedimiento similar para calcular fácilmente los cuadrados de 190, 191, 192, ..., 199? □

Observa cómo se desarrollan las siguientes operaciones:

$$42^2 - 38^2 = (42 + 38)(42 - 38) = 80 \times 4 = 320$$

$$105^2 - 95^2 = (105 + 95)(105 - 95) = 200 \times 10 = 2\,000$$

$$625^2 - 575^2 = (625 + 575)(625 - 575) = 1\,200 \times 50 = 60\,000$$

3. Calcula mentalmente:

a) $25^2 - 15^2 =$
b) $65^2 - 25^2 =$
c) $175^2 - 125^2 =$
d) $550^2 - 450^2 =$

Si queremos calcular el producto 93×107. Primero vemos que 100 está situado exactamente a la mitad (es el promedio) entre 93 y 107. Utilizando este hecho tenemos:

$$\begin{aligned} 93 \times 107 &= (100 - 7)(100 + 7) \\ &= 100^2 - 7^2 \\ &= 10\,000 - 49 \\ &= 9\,951 \end{aligned}$$

Ahora que queremos calcular 62×79. En este caso el promedio es 70.5, que no es un número entero. Para darle la vuelta a esta dificultad, escribimos:

$$\begin{aligned} 62 \times 79 &= 62 \times (78 + 1) \\ &= 62 \times 78 + 62 \\ &= (70 - 8)(70 + 8) + 62 \\ &= 70^2 - 8^2 + 62 \\ &= 4\,900 - 64 + 62 \\ &= 4\,898 \end{aligned}$$

4. Calcula utilizando la tabla de cuadrados:

a) $28 \times 54 =$
b) $29 \times 36 =$
c) $75 \times 89 =$
d) $57 \times 86 =$
e) $82 \times 116 =$

5. Calcular sin utilizar la tabla de cuadrados:

a) $25 \times 15=$
b) $38 \times 63=$
c) $80 \times 120=$
d) $175 \times 226=$
e) $950 \times 1\,050=$

El cálculo de productos notables y la factorización de polinomios no deben tratarse en momentos separados, pues es importante que los alumnos comprendan que se trata de procesos inversos y utilicen desde el inicio los productos notables para factorizar polinomios. Problemas como los que se encuentran en seguida podrán ayudar a conseguir este propósito.

1. Completar de manera que se cumpla la identidad:

a) $(\square + 1)^2 = x^2 + \square + 1$	*f*) $(3a + \square)^2 = 9a^2 + \square + 4$
b) $x^2 - 4 = (x + \square)(x - \square)$	*g*) $x^2 - \square + 16 = (x - \square)^2$
c) $(2c - \square)^2 = \square - 12c + \square$	*h*) $(\square + 3)(\square - 3) = x^2 - 9$
d) $(\square + \square)^2 = x^2 + 2xy + \square$	*i*) $a^2 - 4 = (\square + 2)(\mathrm{a} - \square)$
e) $(3a + \square)^2 = \square + \square + b^2$	*j*) $9x^2 - 25y^2 = (3x + \square)(3x - \square)$

2. Completar de manera que en cada caso se obtenga un trinomio cuadrado perfecto e indicar de qué trinomio se trata (en algunos casos hay más de una forma de completar).

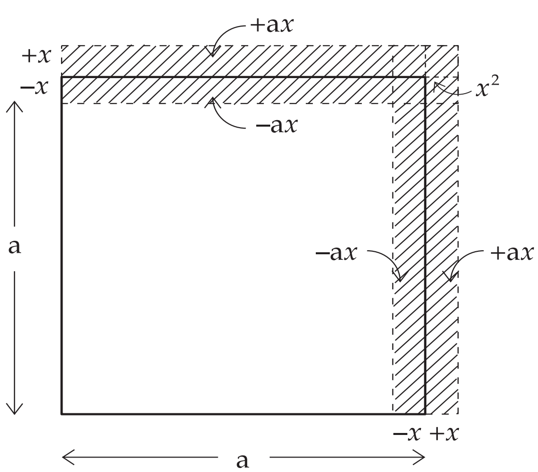
a) $a^2 + 2ab$	*e*) $x^2 + y^2$
b) $4x^2 + 4xy$	*f*) $25x^2 - 40xy$
c) $y^2 - 6y$	*g*) $9x^2 + 16y^2$
d) $1 + 4x$	*h*) $9b^2 - 18bx$

El profesor deberá decidir el grado de complejidad de los ejercicios que propone a sus alumnos y el momento conveniente para introducir coeficientes decimales y fraccionarios.

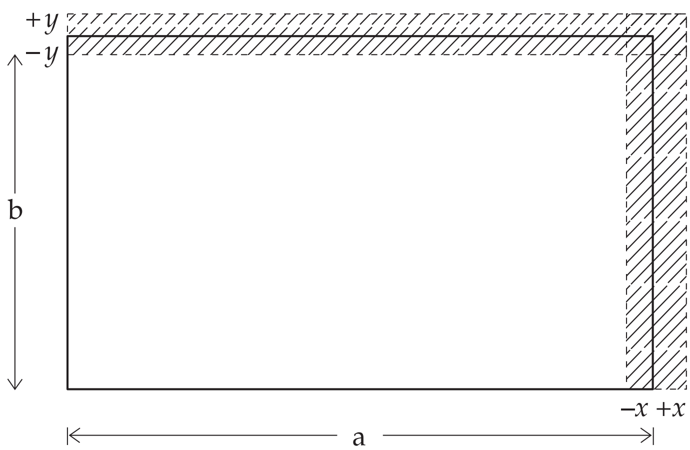
Debe cuidarse que el tratamiento de los productos notables y la factorización de polinomios no se reduzca a su ejercitación. Hay muchas situaciones y problemas que permiten mostrar aplicaciones interesantes en otros campos de las matemáticas elementales. A continuación se dan algunos ejemplos.

1. *Un cálculo de error*

En un depósito garantizan las dimensiones de una lámina cuadrada de acero con una precisión o tolerancia de más o menos x milímetros, donde por lo general x es muy pequeño respecto de las dimensiones de la lámina. ¿Qué podemos decir del área de la lámina? (En la figura se ha exagerado intencionalmente el valor de x.)



Observación. Si llamamos *a* al lado del cuadrado tenemos: $(\mathrm{a} \pm x)^2 = \mathrm{a}^2 \pm 2\mathrm{a}x + x^2$



$(a \pm x)(b \pm y) = ab \pm ay \pm bx \pm xy \approx ab \pm (ay + bx)$

Lo que quiere decir que la diferencia entre el área real de la lámina y la que debería tener si las medidas fueran precisas es del orden de $2ax + x^2$. Si despreciamos el valor de x^2, por ser muy pequeño respecto de $2ax$, podemos considerar que la diferencia, o error, en el área es del orden de $2ax$. En general, si se tratara de una lámina rectangular de dimensiones a y b y se consideraran márgenes de tolerancia de x e y milímetros respectivamente, el error sería del orden de $ay + bx$, como puede verificarse haciendo los cálculos correspondientes.

2. *Un problema de máximos*

Mostrar que de todos los rectángulos de perímetro $4a$, el de mayor área es el cuadrado cuyo lado es a (o dicho en otros términos, de todos los rectángulos con un perímetro dado, el de mayor área es el cuadrado cuyo lado mide un cuarto del perímetro).

Las dimensiones de los lados de un rectángulo de perímetro $4a$ pueden escribirse como $a + x$ y $a - x$, por lo que tenemos:

$$\text{Área} = (a + x)(a - x) = a^2 - x^2$$

Entonces el área será máxima cuando $x = 0$, es decir, cuando las dimensiones del rectángulo sean iguales entre sí, en cuyo caso se trata del cuadrado de lado a.

3. *Ternas pitagóricas*

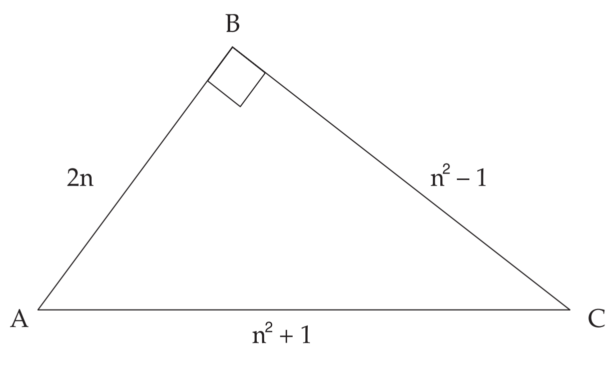
Demostrar que si un triángulo ABC satisface:

$$AB = 2n, \quad BC = n^2 - 1 \quad \text{y} \quad CA = n^2 + 1$$

entonces es rectángulo (es decir, mostrar que satisface el teorema de Pitágoras). ¿Dónde está el ángulo recto?

El ángulo recto está en el vértice B:

$$(n^2 - 1)^2 + (2n)^2 = (n^2 + 1)^2$$

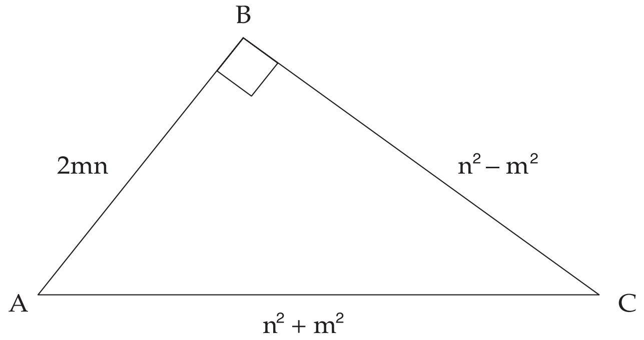


Si sustituimos n = 2, 3, 4, ... en las condiciones del problema obtenemos las siguientes ternas de números llamadas *pitagóricas:*

3, 4, 5; 6, 8, 10; 8, 15, 17;…

Las condiciones del problema pueden generalizarse considerando dos números enteros positivos m y n tales que $n > m$ y un triángulo ABC que satisfaga:

$$AB = 2mn, \quad BC = n^2 - m^2 \quad y \quad CA = n^2 + m^2$$



Verificar que:

$$(n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = (n^2 + m^2)^2$$

Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado

El álgebra en la educación secundaria culmina con el estudio de las ecuaciones de segundo grado, o cuadráticas, y los métodos que sirven para resolverlas, incluida la fórmula general. Las ecuaciones cuadráticas y, en general, las funciones cuadráticas, juegan un papel central en varias partes de las matemáticas y la física elementales, como son la geometría analítica, la resolución de los problemas más sencillos de máximos y mínimos, y el estudio del movimiento uniformemente acelerado, cuyas ecuaciones generales son:

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{cases}$$

donde x y t representan las variables posición y tiempo, y las constantes x_0, v_0 y a representan, respectivamente, la posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración, la cual permanece constante a lo largo de todo el movimiento.

Un matemático decía que la ecuación cuadrática constituye “el primer ejemplo interesante de solución de ecuaciones que no es trivial ni excesivamente difícil”. Aunque no estamos totalmente de acuerdo —porque las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales no son tan fáciles para quien empieza a aprenderlas— la frase tiene gran parte de verdad. Las ecuaciones cuadráticas representan un salto cualitativo respecto de las lineales, en la educación básica no se puede avanzar hacia el estudio de las ecuaciones de grados superiores, pues las fórmulas generales para resolver cúbicas y cuárticas son complicadas y no existen para las ecuaciones de quinto grado o grados mayores.

Los alumnos están familiarizados con las operaciones que sirven para resolver ecuaciones lineales, como son operar con ambos miembros o trasponer términos de un lado a otro de la ecuación. Para resolver ecuaciones cuadráticas deberán acostumbrarse a otras ideas. En la resolución de este tipo de ecuaciones cuadráticas la forma de una ecuación juega un papel importante, pues los métodos para resolverla consisten en llevarla a una de las formas:

$$(ax + b)^2 = d \quad \text{o} \quad (ax + b)(cx + d) = 0$$

Luego se despeja x o se aplica el hecho de que un producto es cero si alguno de sus factores lo es.

En el primer caso se obtiene:

$$\begin{aligned} (ax + b)^2 &= d \\ ax + b &= \pm \sqrt{d} \\ ax &= -b \pm \sqrt{d} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{d}}{a} \end{aligned}$$

En el segundo:

$$ax + b = 0 \qquad\qquad cx + d = 0$$

$$ax = -b \qquad\qquad cx = -d$$

De donde:

$$x_1 = \frac{-b}{a} \qquad\qquad x_2 = \frac{-d}{c}$$

Las ideas anteriores tardan en comprenderse, por lo que deben prepararse cuidadosamente, aunque tome tiempo de clase. No vale la pena intentar reducir la solución de ecuaciones cuadráticas a la pura aplicación de fórmulas, pues si bien el aprendizaje de la fórmula general es importante, la experiencia muestra que sin los antecedentes necesarios, los alumnos ni la recuerdan, ni saben aplicarla con propiedad.

Lectura

Método gráfico para resolver ecuaciones cuadráticas

Consideremos la siguiente ecuación:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Primero la escribimos en la forma:

$$x^2 = x + 6$$

Entonces resolver la ecuación es equivalente a encontrar el valor de x en el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 6 \end{cases}$$

Para resolver gráficamente este sistema, buscamos los puntos donde la recta $y = x + 6$ interseca la gráfica de la parábola $y = x^2$. Las abscisas de estos puntos nos darán las soluciones de la ecuación, cuyos valores son $x = -2$ y $x = 3$, como puede verse en la gráfica de la página opuesta.

$$(-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$$

$$3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$$

El método es cómodo de emplear, porque para aplicarse a cualquier ecuación cuadrática $Ax^2 + Bx + C = 0$ sólo se requiere:

- Transformar esta ecuación en el sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -\dfrac{B}{A}\,x - \dfrac{C}{A} \end{cases}$$

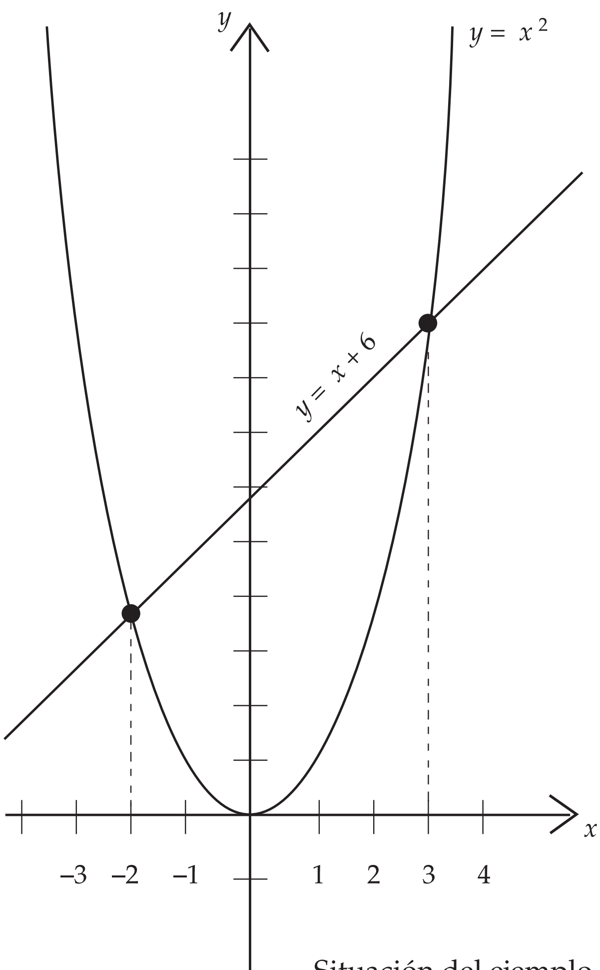
- Un dibujo preciso sobre papel milimétrico o cuadriculado de la gráfica de la parábola $y = x^2$. Este dibujo podrá utilizarse para resolver cuantas ecuaciones se quiera, pues como veremos en seguida, no habrá necesidad de rayarlo.

- Una regla transparente; ubicando esta regla de manera que su borde quede sobre los puntos de coordenada $(0, -C/A)$ y $(-C/B, 0)$, podremos localizar los puntos donde se cruzan la recta y la parábola y, de allí, las soluciones de la ecuación.

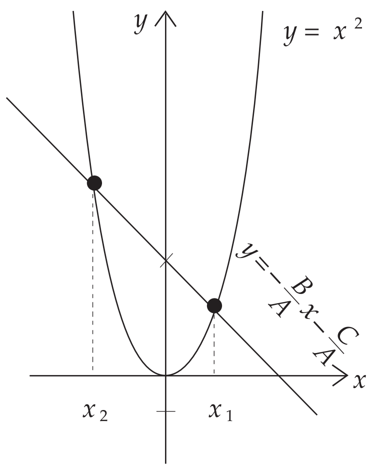
El profesor podrá verificar que los pasos anteriores son correctos, aplicando a la ecuación general los mismos pasos seguidos en el ejemplo.

El método gráfico también podrá utilizarse para examinar los diferentes casos que pueden presentarse al resolver una ecuación cuadrática. Así, se puede tener:

- Que la recta corte a la parábola en dos puntos y, entonces, la ecuación tiene dos soluciones reales.
- Que la recta sea tangente a la parábola, en cuyo caso la ecuación sólo tiene una solución, o como también se dice, las dos raíces de la ecuación son iguales.
- Que la recta no corte, ni toque a la parábola, lo que quiere decir que la ecuación no tiene raíces reales (esto es, las dos raíces tienen parte imaginaria).



Situación del ejemplo



Situación general

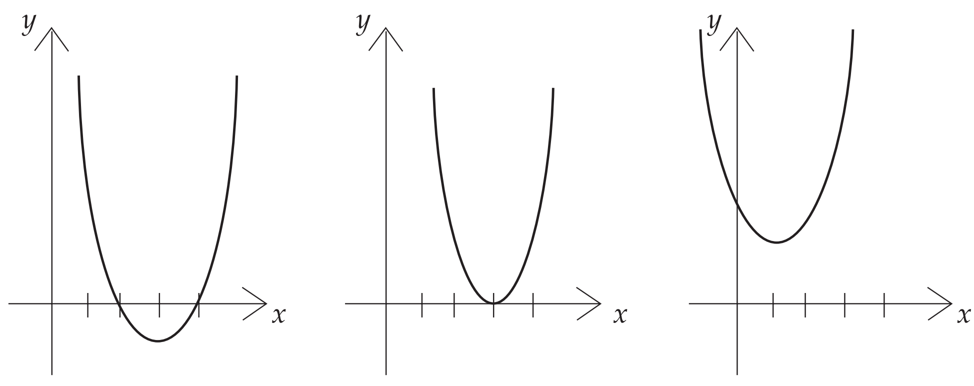
La estrategia tradicional para enseñar a resolver ecuaciones cuadráticas consiste en distinguir y tratar por separado las llamadas ecuaciones incompletas de la ecuación completa. El inconveniente de esta estrategia es que con frecuencia conduce a empobrecer los problemas y situaciones que se proponen en clase. Es importante, en particular, que los alumnos:

- Resuelvan ecuaciones puestas en la forma $(ax + b)^2 = d$ y practiquen el procedimiento de completar cuadrados para llevar una ecuación cuadrática a esta forma y resolverla.

- Resuelvan ecuaciones por el método de factorización, sin limitarse a las ecuaciones incompletas que pueden llevarse a la forma $x(ax + b) = 0$.

Una vez que los alumnos hayan resuelto diversos problemas con la técnica de completar cuadrados, el profesor podrá deducir junto con ellos la fórmula general y plantear diversas actividades. Deberá observarse que dependiendo del signo del discriminante $B^2 - 4AC$, una cuadrática puede tener dos soluciones reales, sólo una o ninguna solución real. En este último caso la solución de la ecuación son dos números imaginarios o complejos que se estudiarán más adelante, en la preparatoria.

La comprensión de este punto puede facilitarse si previamente se han bosquejado las gráficas de algunas funciones de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$, interpretado geométricamente las soluciones de ecuaciones cuadráticas y visto ejemplos de los diferentes casos que pueden presentarse.



Dos soluciones $y = x^2 - 6x + 8$ | Solución única $y = x^2 - 6x + 9$ | Soluciones imaginarias $y = x^2 + 2x + 3$

Los alumnos deberán tener numerosas oportunidades de resolver problemas que los conduzcan a ecuaciones cuadráticas. Para esto no es necesario, ni recomendable, esperar a que dominen los procedimientos algebraicos de resolución, sino que se les pueden proponer desde antes y permitir que los resuelvan por medios numéricos y gráficos. A continuación aparecen algunos ejemplos cuyo planteamiento da lugar a ecuaciones cuadráticas.

Problemas con números

1. Encontrar dos números cuya suma sea 28 y cuyo producto sea 187.

2. Encontrar tres números consecutivos cuyos cuadrados sumen 77.

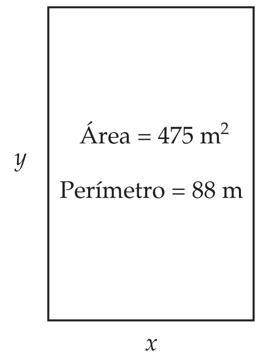
3. Al multiplicar dos números se obtiene 206 como resultado y al dividir el mayor entre el menor el cociente y el residuo son iguales a 3. ¿Cuáles son estos números?

4. Si un número aumenta en 2, su cubo aumenta también en 2. ¿Cuál es el número?

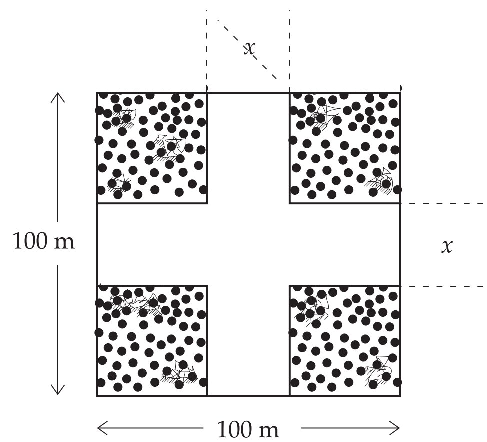
5. Encontrar dos números impares consecutivos cuyo producto sea 4623.

Problemas geométricos

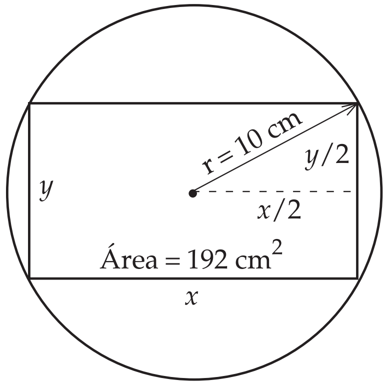
6. Un terreno rectangular tiene un perímetro de 88 m y un área de 475 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?



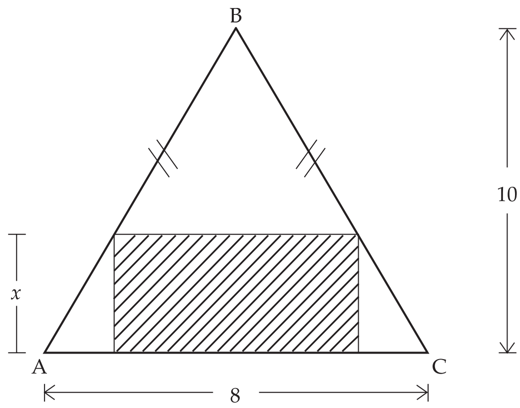
7. En un parque cuadrado que mide 100 m de cada lado se van a construir dos andadores, tal y como se indica en la figura. ¿Cuál debe ser el valor de x para que la superficie de los andadores sea igual a la de la parte jardinada?



8. Calcula la longitud de los lados de un rectángulo de 192 cm^2 inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.



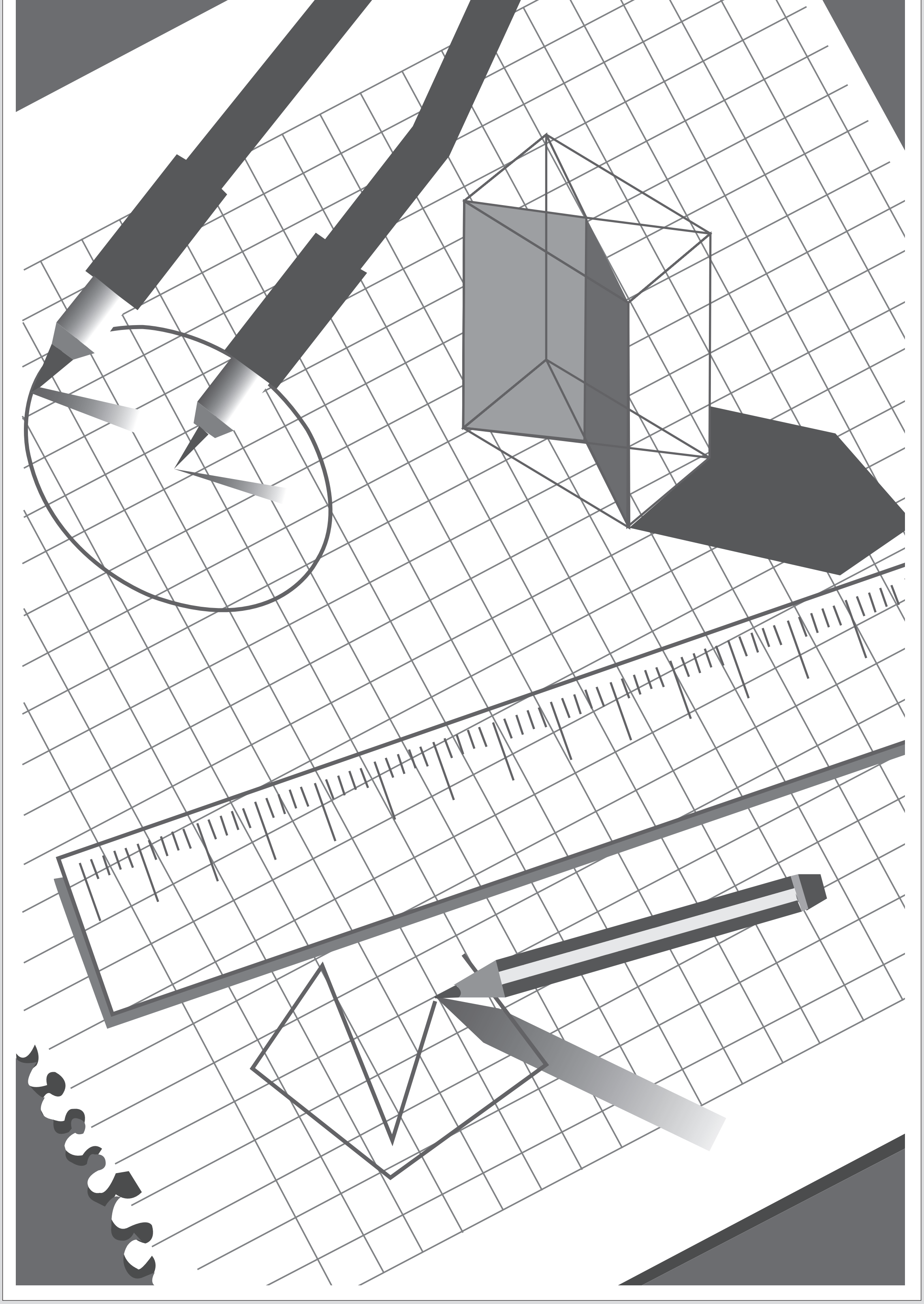
9. Considera la figura de la derecha. ¿Cuál debe ser el valor de *x* para que el área del rectángulo sombreado sea la mitad de la del triángulo isósceles?



10. Varios amigos ganan 90 canicas , pero deciden compartirlas con un amigo más, por lo que a cada uno le tocan 3 canicas menos. ¿Cuántos amigos eran?

11. Los alumnos de un grupo se cooperaron para comprar un libro de \$ 90 para la biblioteca, pero tres no dieron su cuota a tiempo, por lo que los otros tuvieron que poner \$ 1 adicional cada uno. ¿Cuántos alumnos cooperaron para comprar el libro?

12. Dos automóviles salen con destino a una ciudad situada a 450 km. Uno de ellos va a 15 km por hora más rápido que el otro, por lo que llega una hora y media antes. ¿A qué velocidad viajaba cada automóvil? ¿Cuánto tardó cada uno en llegar? □



Geometría

- Los orígenes de la geometría
- El estudio de la geometría en la educación secundaria
- Dibujos y trazos geométricos
- Figuras básicas y simetría
- Medición y cálculo geométrico
- Iniciación al razonamiento deductivo
- Sólidos

Geometría

Los orígenes de la geometría*

La geometría espontánea

Las personas desarrollan de manera natural gran cantidad de conocimientos geométricos. Estos conocimientos se adquieren desde la infancia y tienen su origen en la capacidad de los seres humanos para observar y reconocer las características exteriores de los objetos y comparar formas y tamaños.

Desde muy pronta edad se adquiere la noción de distancia y se aprende que el camino más corto entre dos puntos es la línea recta. Se reconoce la conveniencia de que ciertas superficies estén limitadas por líneas rectas, lo que conduce a las primeras figuras geométricas, como son los cuadrados, rectángulos y otros polígonos. De hecho, cuando se trata de puntos muy separados entre sí, parece natural pensar la distancia entre ellos en términos de líneas rectas o, cuando se barda un terreno, fijar primero postes en las esquinas y luego tender los hilos o alambres en línea recta.

Otras situaciones de la vida cotidiana conducen a nociones como las de líneas verticales y horizontales, líneas paralelas y perpendiculares; a distinguir entre líneas curvas y rectas, o entre los cuerpos redondos y aquellos que tienen sus caras planas.

Pueden darse muchos más ejemplos, pero los anteriores muestran cómo del universo aparentemente desorganizado de las formas físicas que nos rodean, se extrajeron, desde las épocas más remotas, las figuras más ordenadas de la geometría. Estas formas geométricas simples las utilizó el hombre de la antigüedad para elaborar frisos, grecas y otros ornamentos. No cabe duda de que junto con las necesidades de orden práctico, el arte primitivo contribuyó notablemente al desarrollo de la geometría.

Es muy probable que los primeros hombres no se hayan preocupado por sistematizar los conocimientos adquiridos a partir de la experiencia cotidiana, limitándose a resolver problemas aislados entre sí, sin observar o considerar las relaciones entre ellos. Algo muy importante ocurrió cuando se dieron cuenta de que había grupos de problemas que podían resolverse con el mismo procedimiento y aprendieron a extraer reglas generales de una multitud de casos particulares.

* Esta introducción es esencialmente un resumen del capítulo "El Manantial" del libro *Estudio de las geometrías* de Howard Eves, México, UTEHA.

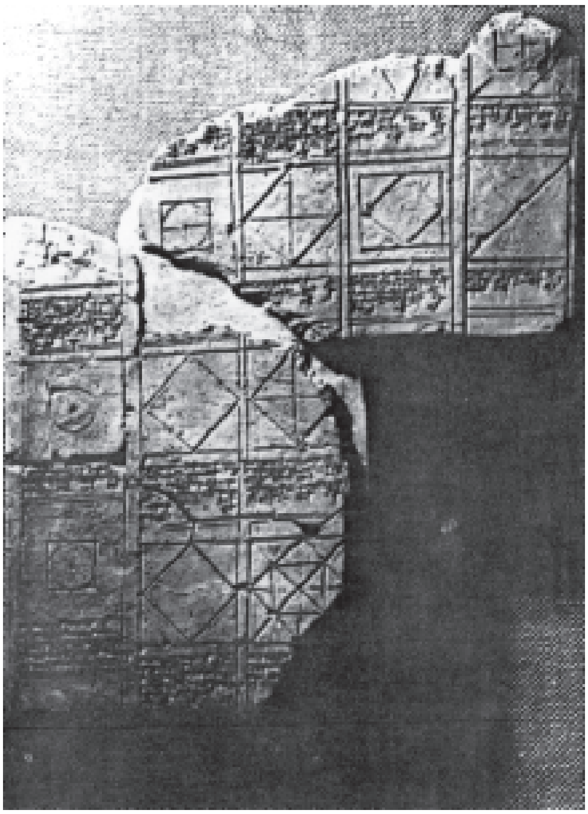
La geometría empírica

Alrededor de tres o dos mil años antes de nuestra era, el desarrollo de las civilizaciones y la necesidad de enfrentar problemas cada vez más complejos, relacionados con la agricultura y la construcción, condujo a los hombres de la antigüedad a descubrir que ciertos hechos responden a una misma ley o regla geométrica. Se pasó entonces de la geometría espontánea de las primeras culturas a una geometría sistemática, de naturaleza fuertemente empírica. Los historiadores parecen concordar en que este hecho se dio de manera independiente en las cuencas de los ríos Nilo en Egipto, Tigris y Éufrates en la antigua Mesopotamia, Indo y Ganges en la India y Hoang Ho y Yang Tsé Kiang en China.

Los registros más antiguos que se conocen de la actividad del hombre en el campo de la geometría datan aproximadamente de 3000 a.C. Consisten en unas tabletas de arcilla cocidas al sol descubiertas en Mesopotamia y en las que se encuentran grabados caracteres cuneiformes. Registros posteriores muestran que entre 1600 y 1800 a.C., los habitantes de Mesopotamia desarrollaron una geometría íntimamente ligada a las necesidades de la medición práctica y estaban familiarizados, entre otras cosas, con las reglas para calcular el área de rectángulos, triángulos rectángulos e isósceles y, quizá, triángulos generales; además podían obtener el volumen de un paralelepípedo y algunos prismas. La circunferencia se tomaba como tres veces el diámetro y el área del círculo como un dozavo del cuadrado de la circunferencia, lo que en términos modernos quiere decir que tomaban el área igual a tres veces el cuadrado del radio.

Asimismo, los pueblos de Mesopotamia sabían que los lados correspondientes de triángulos rectángulos semejantes sonproporcionales, que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto y otros resultados que no mencionaremos, salvo el teorema de Pitágoras, conocido por ellos alrededor de 2000 a.C.

En el antiguo Egipto, la geometría también tuvo un fuerte desarrollo, sobre todo en lo concerniente al conocimiento de las fórmulas de medición necesarias para computar superficies de terrenos y capacida-

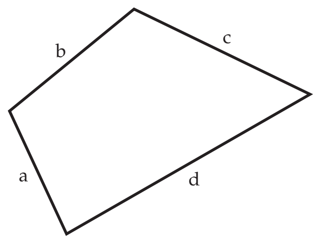


Tablilla babilónica con caracteres cuneiformes que contiene algunos problemas de geometría. Segundo cuarto del tercer milenio a.C.

des de graneros. Para hallar la circunferencia del círculo establecieron una regla, según la cual la razón de un círculo a su circunferencia es la misma razón del área del cuadrado circunscrito a su perímetro, y tomaban el número $4(8/9)^2$, lo que equivale a tomar $\pi = 3.16$. Para obtener el volumen de un cilindro multiplicaban el área de la base por la altura; y parece que conocieron la fórmula para calcular el área del triángulo, algunos resultados elementales sobre triángulos similares y, aunque no se sabe si alcanzaron a descubrir el teorema de Pitágoras, supieron que el triángulo de lados 3, 4 y 5 tiene un ángulo recto, resultado que hoy día también conocemos y utilizan los albañiles. Pero su conocimiento más notable fue la fórmula correcta para el volumen de un tronco de pirámide recta de base cuadrada:

$$V = h \, \frac{(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

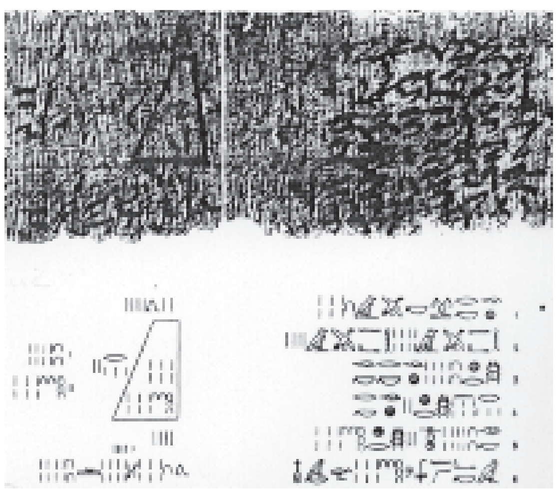
Resulta interesante que tanto los egipcios como los antiguos habitantes de Mesopotamia utilizaron la misma fórmula (incorrecta) para calcular el área de un cuadrilátero de lados consecutivos *a*, *b*, *c* y *d*:



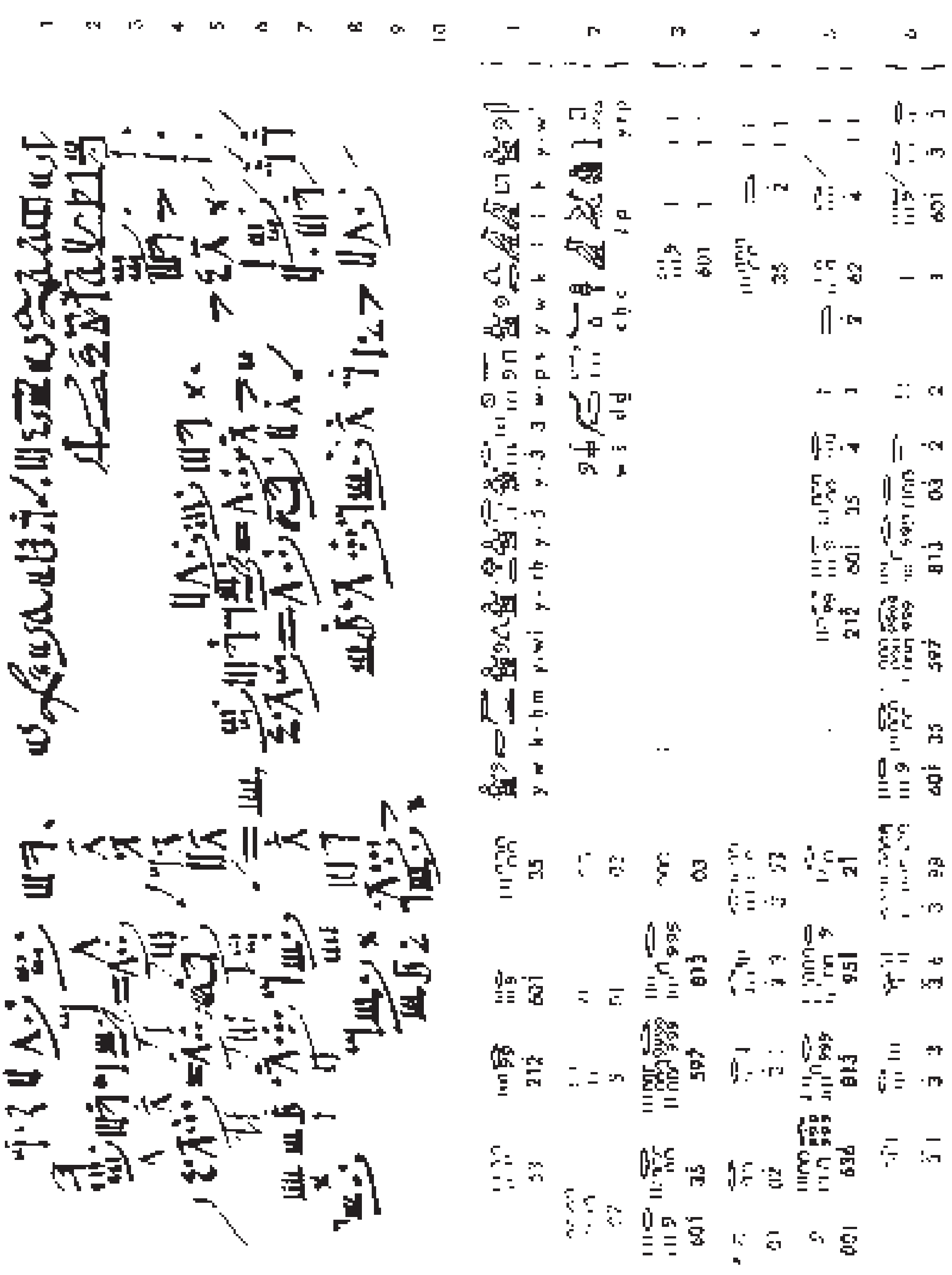
$$A = \frac{(a + c)(b + d)}{4}$$

Hay razones para pensar que las antiguas civilizaciones de la India y China llegaron a descubrimientos similares a los realizados en Egipto y Mesopotamia. Sin embargo, debido a lo perecedero de los materiales sobre los cuales escribían, asociado al clima de esas regiones, casi no se conservan vestigios de sus descubrimientos.

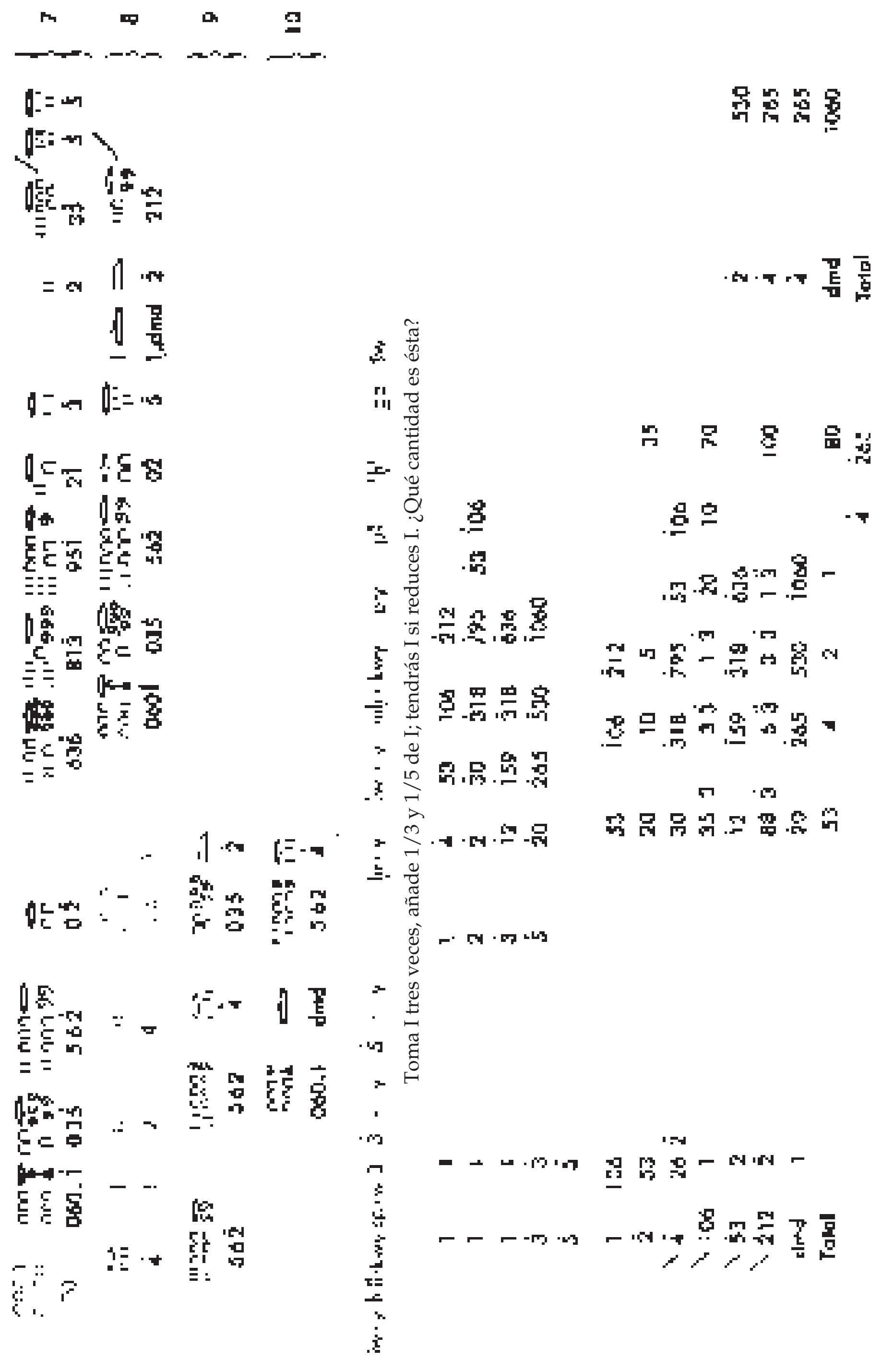
Es importante señalar que en toda la matemática anterior a los griegos no parece encontrarse un solo ejemplo de lo que hoy llamamos un razonamiento lógico o deductivo. En lugar de razonamientos generales, hay simplemente minuciosas descripciones de procesos aplicados a problemas concretos. Con la excepción quizá de algunas consideraciones muy sencillas, la matemática egipcia y mesopotámica parecen haber sido el resultado de numerosas observaciones y tanteos sobre casos especiales, lo que con frecuencia produjo fórmulas incorrectas aunque aceptables para sus necesidades prácticas.



Reproducción del Papiro de Moscú que muestra el problema del volumen del tronco de una pirámide cuadrada, junto con la transcripción jeroglífica (abajo).



El papiro del Rhind. La mayor fuente de información sobre las matemáticas del antiguo Egipto la constituye un rollo de papiro de aproximadamente 30 cm de ancho por 5.50 m de largo que actualmente se encuentra en el Museo Británico, salvo por algunos fragmentos que se encuentran en el Museo de Brooklin. Se le conoce con el nombre del papiro del Rhind porque fue adquirido en 1858 por un anticuario escocés de nombre Harry Rhind en una ciudad vacacional a las orillas del río Nilo. También se le conoce, aunque menos frecuentemente, con el nombre de papiro de Ahmes, en honor del escriba que lo copió en 1650 a. C. Como un ejemplo del contenido del papiro de Ahmes, se presenta en estas páginas un fragmento del mismo. El problema 36 del papiro empieza: Toma I tres veces, añade 1/3 y 1/5 de I; tendrás I si reduces I. ¿Qué cantidad es ésta? El problema se resuelve por el método egipcio. En estas páginas se muestra un facsímil del problema tal como se ve en el papiro. La escritura hierática se lee de derecha a



izquierda. Los caracteres se han reproducido en negro (en el papiro original están en rojo y negro). En el centro de la página hay escritura jeroglífica, que también se lee de derecha a izquierda. Bajo cada línea de jeroglífico se lee una traducción fonética. Los números son arábigos, pero siguen la notación egipcia. Cada línea de jeroglífico y su equivalencia en español están numeradas con respecto a su propia línea hierática. En la parte inferior de la página la fonética y la traducción numérica han sido invertidas para que puedan leerse de izquierda a derecha. Bajo cada expresión fonética está su traducción española. Un punto sobre un número indica que es una fracción con numerador unidad. Dos puntos sobre un 3 representan 2/3, la única fracción egipcia con numerador mayor que 1. Si el lector desea conseguir la solución completa, debe tener presente que el realizador del papiro cometió varias erratas, que han prevalecido en las traducciones.

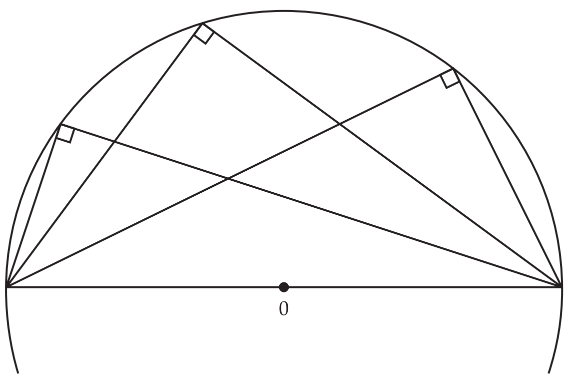
La geometría deductiva

Al decaer las civilizaciones egipcia y mesopotámica, gran parte de la geometría desarrollada por estos pueblos pasó a los griegos. Es un hecho maravilloso que los antiguos griegos no se hayan contentado con extender el número de resultados matemáticos conocidos, sino que transformaron el conjunto de resultados empíricos recibidos de sus antecesores en una ciencia deductiva, es decir, en una disciplina donde las reglas y leyes geométricas no se inducen de la observación de una multitud de casos particulares, sino que se establecen deductivamente mediante un razonamiento lógico.

Nada que se diga o se intente decir podrá exagerar la importancia y las repercusiones que tuvo el descubrimiento del razonamiento deductivo en la historia del pensamiento humano. Baste decir que este hecho marca el nacimiento de la ciencia moderna.

El primer individuo a quien se atribuye haber utilizado el método deductivo para demostrar un hecho geométrico es Tales de Mileto (alrededor de 600 a.C.), conocido como uno de los siete sabios de la Antigüedad. Se dice que demostró, entre otros resultados, que el diámetro divide un círculo a la mitad y que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. Más de dos mil quinientos años después estos resultados pueden parecernos elementales, pero son las primeras proposiciones geométricas que según se tiene noticia fueron demostradas utilizando un razonamiento deductivo.

A Tales se le atribuyen también muchas aplicaciones de la geometría en la solución de problemas prácticos. Cuenta la historia que cuando estaba en Egipto, provocó la admiración de todos al calcular la altura de una pirámide por medio de sombras. Hay dos versiones de cómo Tales resolvió el problema anterior. Según una versión, midió la sombra de la pirámide en el momento en que la longitud de la sombra de un hombre y su altura eran iguales. La segunda versión dice que midió las longitudes de las sombras de la pirámide y de un bastón clavado en el suelo y luego utilizó triángulos semejantes. Ninguna de las dos versiones indica cómo solucionó Tales la dificultad de medir la distancia del extremo de la sombra al centro de la base de la pirámide. Un problema que el profesor puede estar interesado en



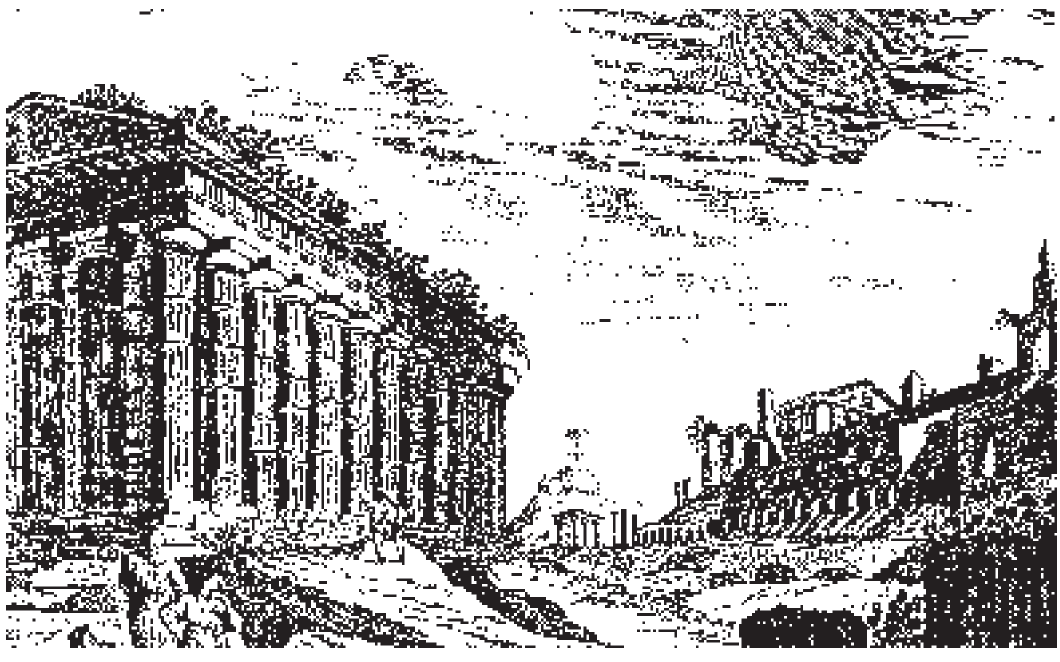
Se le atribuye a Tales de Mileto haber descubierto que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

resolver consiste en idear un método para medir la altura de la pirámide a partir de la observación de dos sombras.

Lo que llama la atención en la historia de Tales es la introducción de elementos muy sencillos, como el bastón y las sombras, gracias a los cuales el problema se resuelve de manera casi inmediata. Hay muchos problemas de medición que se solucionan en forma similar, es decir, introduciendo elementos auxiliares para reducir el cálculo de distancias inaccesibles a la determinación de los elementos de un triángulo.

Pitágoras, quien nació alrededor del año 572 a.C. en la isla de Samos en Grecia, continuó el trabajo de sistematización de la geometría sobre bases deductivas iniciado por Tales 50 años antes. Parece que Pitágoras viajó extensamente por Egipto y los países del antiguo Oriente antes de emigrar, debido a la ocupación persa de Jonia, a la ciudad griega de Crotona, en Italia del sur. Allí fundó una fraternidad dedicada al estudio de la filosofía, las matemáticas y la ciencia.

Durante cerca de 200 años, Pitágoras, y luego sus discípulos y seguidores, contribuyeron al desarrollo de las matemáticas. Conocieron las propiedades de las paralelas y las utilizaron para probar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a dos rectos. Impulsaron notablemente el álgebra geométrica y desarrollaron una teoría de la proporción bastante completa, aunque limitada a las cantidades conmensurables, es decir, a las cantidades que están entre sí en la misma razón que dos enteros. Descubrieron la inconmensurabilidad del lado y la diagonal de un cuadrado, hecho que cambió la historia de las matemáticas. Se les atribuye el descubrimiento independiente y la demostración por métodos deductivos del teorema que hoy lleva el nombre de Pitágoras, que como ya se mencionó antes también fue conocido por los antiguos babilonios.



Asimismo se acredita a los pitagóricos el haber introducido el estudio de los números figurados.

Números triangulares:

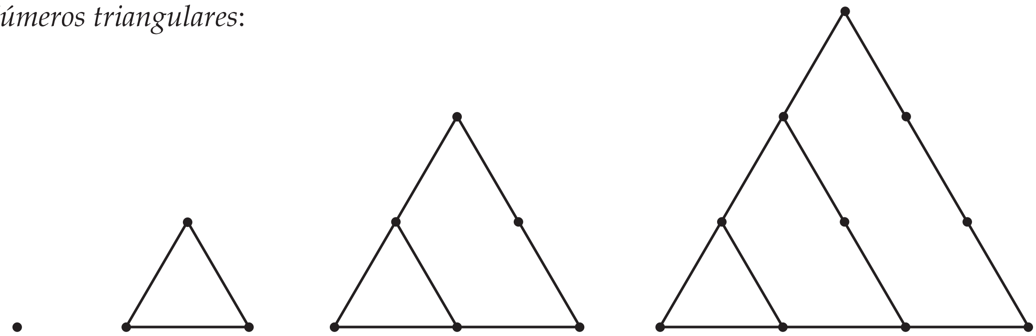


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
1	$1+2=3$	$1+2+3=6$	$1+2+3+4=10$

Números cuadrados:

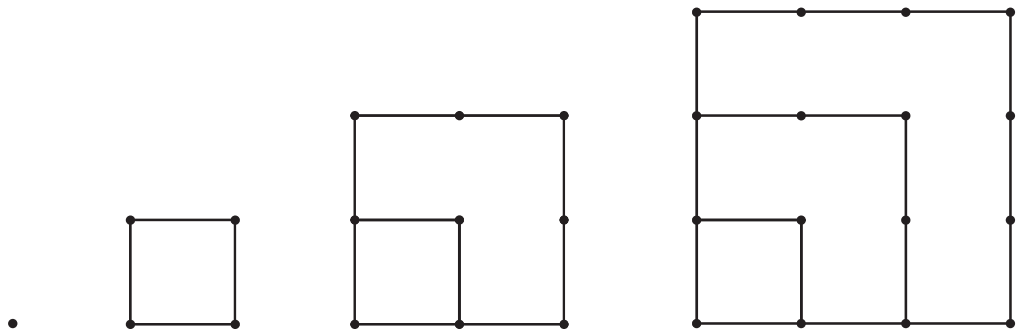


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
1	$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$

Números pentagonales:

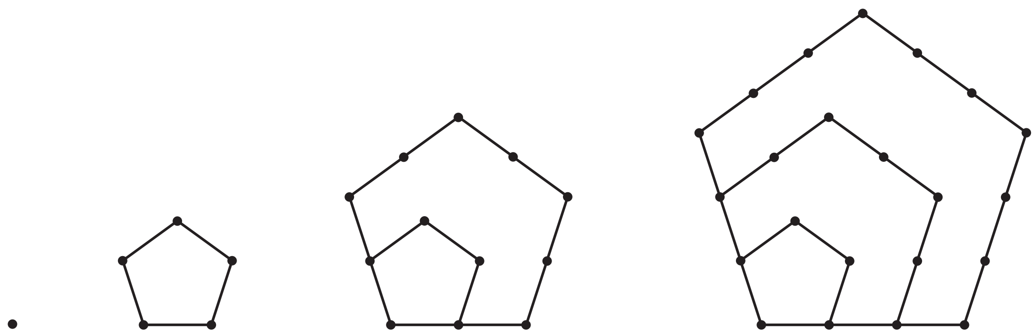
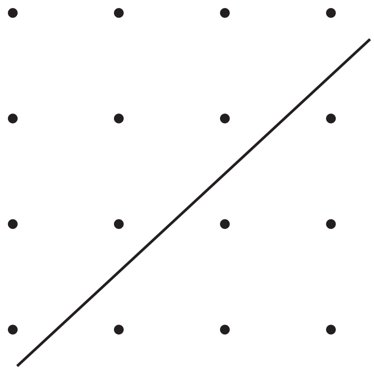
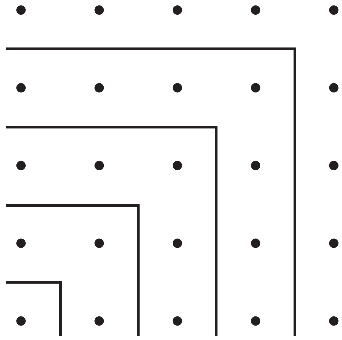


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
1	5	12	22

Los números figurados relacionan la geometría con la aritmética y permiten demostrar muchos teoremas interesantes sobre los números por medios puramente geométricos:



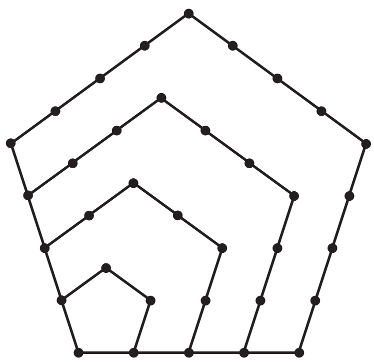
$4^2 = 6 + 10$

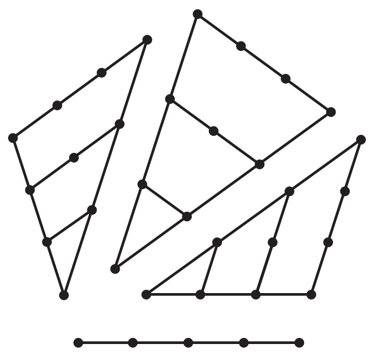


$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

Todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares consecutivos.

La suma a partir del 1, de cualesquier número de impares consecutivos, es un cuadrado perfecto.





El n-ésimo número pentagonal es igual a n *aumentado en tres veces el número triangular $n - 1$.*

Si el profesor está interesado en descubrir por sí mismo algunas demostraciones al estilo pitagórico, le recomendamos intentar probar que:

a) Ocho veces un número triangular más 1 es igual a un número cuadrado.
b) La suma de los primeros n *números pares es un número oblongo.*
c) Cualquier número oblongo es el doble de uno triangular (un número oblongo es un número rectangular donde la base es una unidad mayor que la altura).

El desarrollo que los pitagóricos dieron a la geometría condujo a que hubiera cadenas cada vez más largas de resultados demostrados a partir de otros resultados. Al aumentar la longitud de las cadenas de proposiciones conectadas deductivamente entre sí —y al unirse varias cadenas para formar cadenas aún más largas— comenzó a vislumbrarse el siguiente gran avance de la matemática griega, que consiste en la organización axiomática de la geometría.

Ánfora ática, hallada en Vulci, en la que aparecen Aquiles y Áyax jugando a los dados; obra de Exekias, 530-525 a.C.

La geometría axiomática

En algún momento difícil de precisar, entre Tales (600 a.C.) y Euclides (300 a.C.), surgió en la matemática griega la idea de que la geometría podía construirse como una larga cadena de proposiciones, demostradas por deducción a partir de un número muy reducido de principios o postulados aceptados sin demostración desde el inicio.

El ejemplo más importante de un texto de geometría organizado axiomáticamente lo constituyen los *Elementos* de Euclides. Los *Elementos* no es sólo uno de los más grandes tratados en toda la historia de las matemáticas y el pensamiento humano, también ejerció una influencia que todavía es sensible en el desarrollo de la ciencia moderna y la enseñanza de las matemáticas.

Ningún texto, excepto quizás la Biblia, ha sido tan ampliamente utilizado, editado y estudiado como los *Elementos*. Desde su primera impresión moderna en 1482, se han publicado más de mil ediciones y mucho del contenido tradicional de los textos escolares de geometría plana y del espacio está basado en material extraído del libro de Euclides.

Los *Elementos* son, en gran parte, una recopilación de trabajos realizados por los matemáticos que precedieron a Euclides. Pero esto no le resta nada de valor, pues su gran mérito reside en la inteligencia con que se seleccionaron las proposiciones que lo forman, y se dispusieron lógicamente a partir de un pequeño grupo de suposiciones y postulados iniciales. Y aunque la crítica moderna ha encontrado algunos defectos en la estructura lógica del trabajo de Euclides, los *Elementos* constituyen el intento más antiguo y colosal de aplicación del método axiomático, cuyo patrón se resume en el recuadro.

PATRÓN DEL MÉTODO AXIOMÁTICO

a) Se dan explicaciones sobre ciertos términos básicos: *punto*, *línea*, *plano*,... con la intención de sugerir lo que significan.

b) Algunos principios o proposiciones relativos a los términos básicos se enuncian y suponen verdaderos con base en las propiedades sugeridas por las primeras explicaciones. Estos principios se llaman *axiomas* o *postulados*.

c) Todos los otros términos del discurso se definen a partir de los términos básicos introducidos al inicio.

d) Todos los demás principios o proposiciones del discurso se demuestran lógicamente a partir de los axiomas o postulados iniciales. A las proposiciones que se demuestran se les llama *teoremas*.

Aunque actualmente los dos términos se utilizan como sinónimos, Euclides distinguió entre: *a)* los *axiomas* o *nociones comunes*, que son suposiciones iniciales válidas para todo el discurso; y *b)* los *postulados*, que se refieren sólo a una parte del mismo. Por ejemplo: *Al sumar cosas iguales a cosas iguales se obtienen cosas iguales*, o *El todo es siempre mayor que una parte* son nociones comunes. En cambio, *Una recta puede trazarse desde cualquier punto a otro*, o *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí* son postulados propios de la geometría.

LOS POSTULADOS Y AXIOMAS DE EUCLIDES

Los axiomas o nociones comunes

1. Las cosas que sean iguales a la misma cosa también son iguales entre sí.
2. Si a cantidades iguales se suman otras también iguales, los totales serán iguales.
3. Si se restan cantidades iguales de otras también iguales, los residuos serán iguales.
4. Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que una parte.

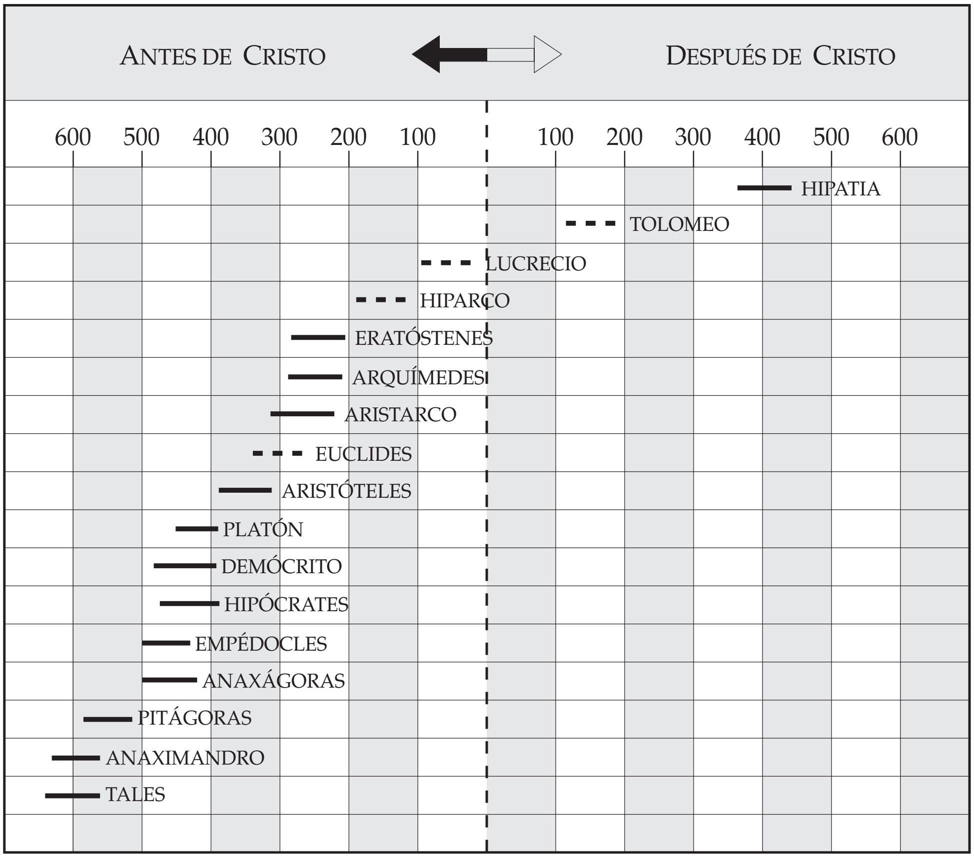
Los postulados

1. Una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro.
2. Una recta finita puede prolongarse continuamente y hacerse una recta ilimitada o indefinida.
3. Una circunferencia puede describirse con un centro y una distancia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta que corte a otras dos forma con éstas ángulos interiores del mismo lado de ella que sumados sean menores que dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos rectos.

Euclides, junto con Arquímedes (287-212 a.C.) y Apolonio (262-200 a.C.), quienes le sucedieron, marcan el apogeo de las matemáticas griegas. Después de ellos, sólo Diofante, llamado a veces el "padre del álgebra", y Pappo, quien vivió 500 años después de Apolonio y es autor de numerosos trabajos originales, pudieron darles vida. Podemos decir que, al desaparecer Pappo, las matemáticas dejaron por mucho tiempo de ser un estudio vivo y su memoria se perpetuó a través del trabajo de escritores y críticos sin la grandeza de sus antecesores.

Después, la situación se volvió cada vez más difícil para el trabajo científico y el pensamiento libre e imaginativo. Durante la Edad Media, el interés por las matemáticas decayó en Europa y los descubrimientos griegos sólo se salvaron del olvido total gracias al trabajo de los eruditos árabes. Debemos al pueblo y la civilización árabes haber sabido conservar y transmitir a la posteridad esta parte de la cultura humana.

Cronología de los matemáticos griegos



Homero (siglo ¿IX? VIP a.C.) Vidas aproximadas de científicos jonios y griegos entre el VII a.C. y el siglo V d.C. La decadencia de la ciencia queda marcada en la tabla por la escasez relativa de científicos después del siglo primero a.C.

El estudio de la geometría en la educación secundaria

Hay varias razones por las que es importante el estudio de la geometría en el nivel básico. Por un lado, desarrolla la imaginación espacial de los alumnos y su capacidad para explorar, representar y describir su entorno físico. Por otro lado, les proporciona un conocimiento útil en la vida cotidiana, las ciencias, las técnicas y diversos campos de la actividad humana. También los prepara para comprender mejor las ideas relacionadas con el número, la medición y otras partes de las matemáticas.

Los alumnos llegan a la secundaria sabiendo mucha geometría, desarrollada espontáneamente o aprendida en la primaria. El profesor no debe ignorar este conocimiento, sino retomarlo y hacerlo evolucionar gradualmente hacia temas más avanzados. En este proceso es importante que los alumnos conozcan y utilicen con propiedad el lenguaje de la geometría. Pero no basta con que se aprendan y recuerden los nombres de las figuras, o las fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. Es necesario que puedan explorar e investigar las propiedades geométricas de las figuras y objetos; que tengan numerosas oportunidades de utilizarlas para resolver problemas; y que se planteen situaciones muy variadas de sus aplicaciones concretas.

Es muy importante que la resolución de problemas de geometría desarrolle en el estudiante la capacidad de producir conjeturas, comunicarlas y validarlas.

Desde el punto de vista anterior, el estudio de la geometría en la educación secundaria tiene como propósitos principales:

- Proporcionar a los alumnos una experiencia geométrica que les ayude a comprender, describir y representar el entorno y el mundo donde viven.

- Proporcionarles, también, una serie de conocimientos que les serán útiles para resolver problemas de la vida cotidiana y acceder al estudio de otras materias y disciplinas.

- Iniciarlos gradualmente en el razonamiento deductivo.

El sistema educativo mexicano es relativamente joven, por lo que el estudio de la geometría todavía no tiene la tradición que se observa en otras partes del mundo. Además, la enseñanza de esta disciplina fue desfavorecida por su ubicación entre las últimas unidades de los programas anteriores del primero y segundo grado de la escuela secundaria. Para remediar esta situación se recomienda que, durante los tres grados, la geometría se estudie a lo largo de todo el año escolar, de manera que los alumnos puedan practicarla constantemente y ninguno de sus temas sea dejado en su totalidad para el final.

Uno de los problemas que presenta el estudio de la geometría en el nivel básico, tanto en México como en el resto del mundo, es que con frecuencia sus contenidos y propósitos están poco definidos y no se ve con claridad cuáles son los medios para lograr un aprendizaje significativo de esta disciplina. En tales circunstancias, no es raro que el estudio de la geometría se limite en ocasiones a presentar algunas definiciones, teoremas y demostraciones para que los alumnos las memoricen, o a intentar iniciarlos prematuramente en la geometría axiomática.

Para no caer en estos extremos, los nuevos programas enfatizan, entre otros, los siguientes aspectos en el estudio de la geometría:

- Los trazos y construcciones geométricas como una forma de explorar y conocer las propiedades y características de las figuras geométricas.

- El conocimiento y uso efectivo de los diferentes instrumentos de medida —así como el diseño de situaciones y problemas que favorezcan la estimación de magnitudes físicas y geométricas—, como actividades que deberán acompañar naturalmente el uso de las fórmulas para calcular perímetros, áreas, volúmenes y capacidades.

- La exploración de las simetrías de las figuras por medio de actividades y problemas que favorezcan las manipulaciones, el dibujo y la medida.

- El conocimiento, manipulación y representación plana de los sólidos comunes, con el objeto de que los alumnos desarrollen su imaginación espacial y se acostumbren al lenguaje utilizado para describirlos.

- La aplicación de las fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, así como de los teoremas de Pitágoras y de semejanza, en la resolución de numerosos ejercicios y problemas de cálculo geométrico.

- La iniciación gradual al razonamiento deductivo, en situaciones escogidas por el profesor y teniendo en cuenta que el acceso a la demostración en matemáticas es un objetivo que requiere tiempo y una preparación cuidadosa.

Las sugerencias que se presentan a continuación no intentan suplir la experiencia pedágogica del profesor, ni tampoco limitar su imaginación y curiosidad por explorar las situaciones que considere favorables para el aprendizaje de la geometría.

Dibujos y trazos geométricos

El dibujo constituye una parte de la geometría que con frecuencia se descuida en los cursos, pues cuando no se le elimina totalmente, se reduce a unas cuantas construcciones rutinarias con regla y compás. Esta situación es desafortunada, ya que los trazos geométricos pueden ser fuente de problemas a partir de los cuales los alumnos pueden observar, investigar y experimentar con las figuras geométricas y sus propiedades, al mismo tiempo que desarrollan nociones y habilidades necesarias para avanzar hacia temas más complejos. Por ello es importante que a partir de actividades y problemas bien escogidos, el dibujo y los trazos geométricos permitan al alumno:

- Familiarizarse con las figuras y situaciones usuales de la geometría, reconocer sus elementos y explorar sus propiedades características.

- Apropiarse del vocabulario y lenguaje básicos de la geometría, a partir de las instrucciones de trazado: *el segmento que une, o tiene por extremos, los puntos A y B; el triángulo de vértices A, B y C; el círculo con centro en O y radio 5 cm; etcétera.*

- Prepararse para acceder a la resolución de problemas de geometría y al razonamiento deductivo.

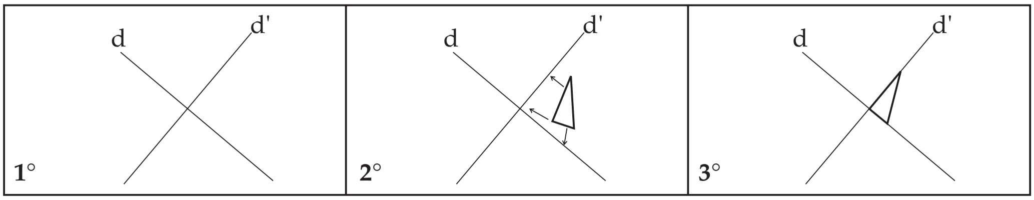
Por otro lado, los trazos y construcciones geométricas poseen una ventaja pedagógica que no tienen otras partes de la geometría y de las matemáticas. Por ejemplo, un alumno que realiza un cálculo de áreas o intenta una demostración tendrá dificultades para darse cuenta de si el resultado es exacto, o de si ha seguido un razonamiento correcto. Esto no ocurre en el dibujo geométrico, donde el resultado mismo de la tarea es una forma de controlar si está bien o mal realizada. Aun los alumnos inexpertos podrán ver si un dibujo está mal hecho y necesita corregirse, lo que favorecerá la reflexión sobre las figuras geométricas y sus propiedades.

El programa recomienda que los alumnos tengan diversas oportunidades de practicar el dibujo y los trazos geométricos a lo largo de todo el estudio de la geometría, pero muy particularmente durante el primer y segundo grado.

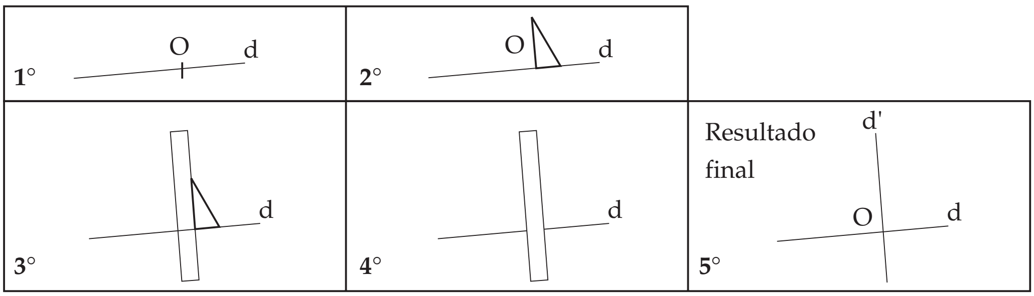
Uso de los instrumentos de dibujo

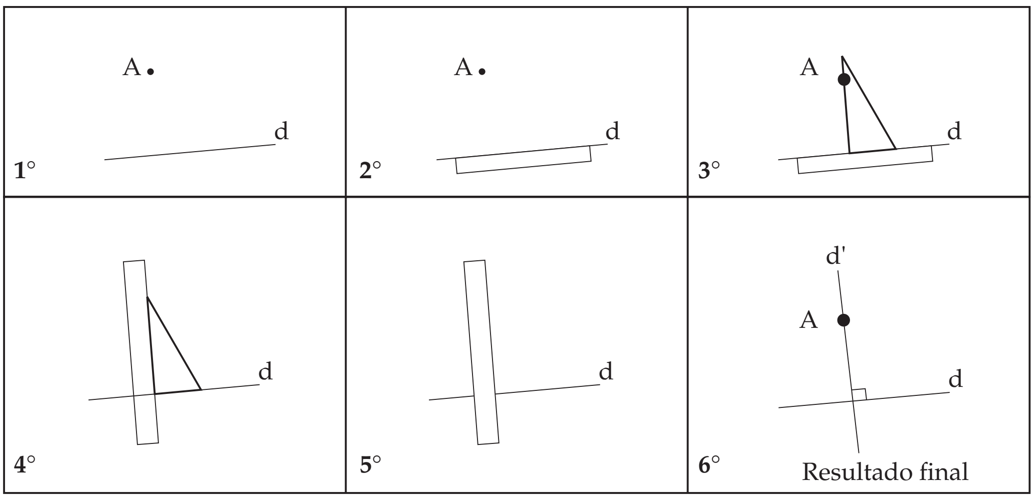
Las primeras actividades tendrán como objetivo que los alumnos conozcan y perfeccionen el uso de los diferentes instrumentos de dibujo y medida: regla graduada y sin graduar, compás, escuadras y transportador, sin olvidar el uso de papel cuadriculado y el pantógrafo para ampliar o reducir un dibujo.

Uso de las escuadras para verificar perpendicularidad.



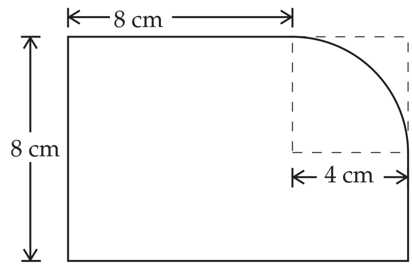
Para dibujar perpendiculares.



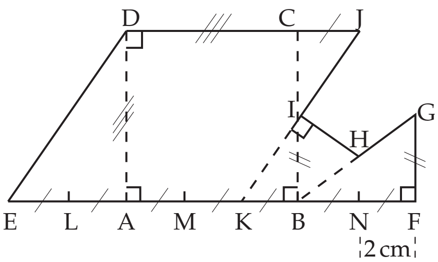


En este momento conviene que se utilicen todos los instrumentos, sin limitarse exclusivamente a las construcciones usando sólo regla sin graduar y compás. Se podrá pedir a los alumnos que utilicen las escuadras para construir o verificar si dos rectas son perpendiculares o paralelas, o que las usen, junto con la regla graduada y el transportador, para trazar triángulos, cuadrados y otras figuras. Copiar o reproducir figuras como las siguientes los prepara para enfrentar más tarde tareas más complicadas.

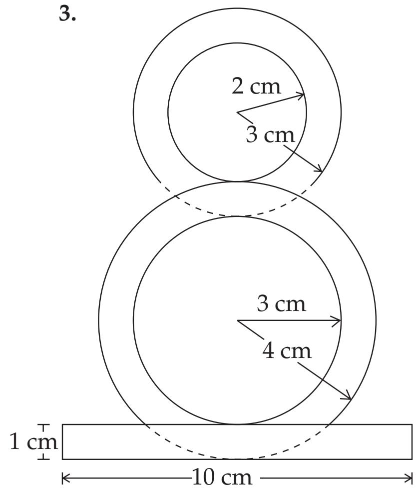
1.



2.

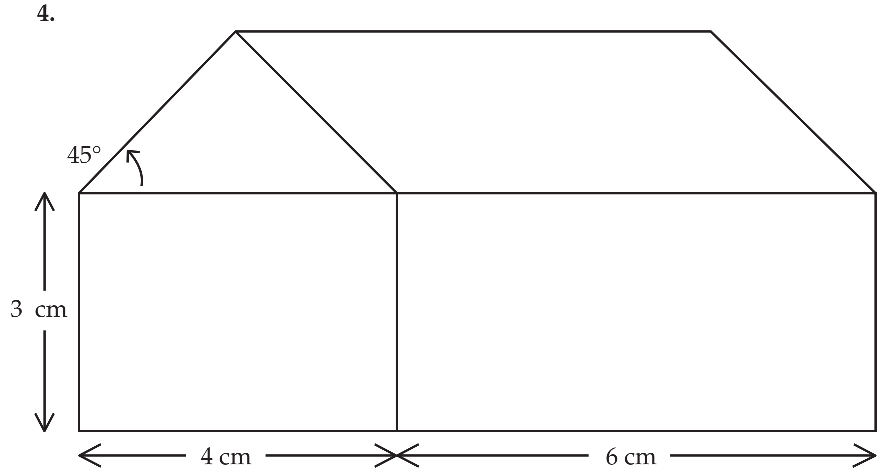


3.



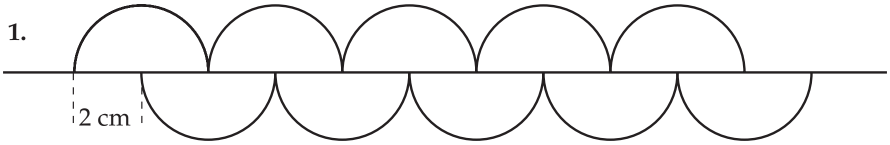
El dibujo geométrico también sirve para aclarar aspectos de las matemáticas que no pertenecen necesariamente al campo de la geometría. Por ejemplo, si se quiere dar a los alumnos una imagen viva de los efectos de multiplicar un número por otro menor o mayor que 1, se les puede proponer que dibujen las figuras que se obtienen al multiplicar las dimensiones de la siguiente figura por 0.9, 0.8, 0.7,.., o bien por 1.1, 1.2, 1.3,...

4.

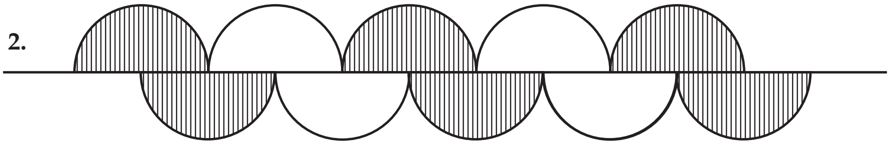


MÁS FIGURAS PARA REPRODUCIR

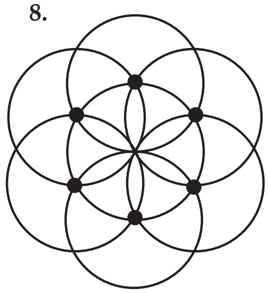
1.



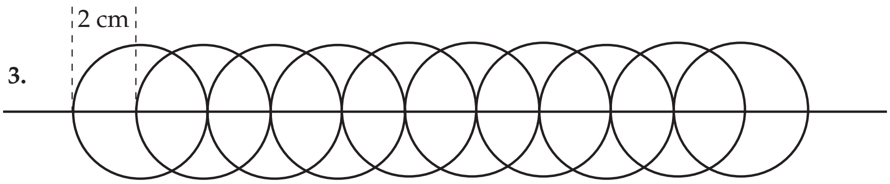
2.



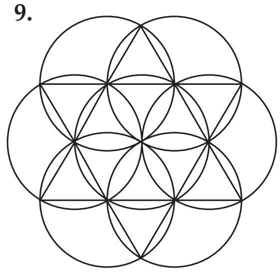
8.



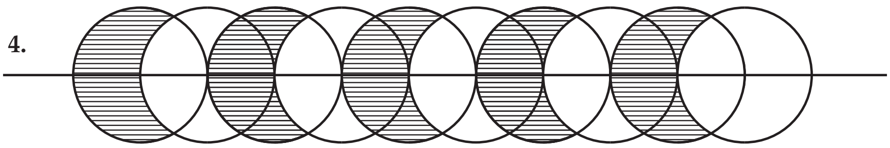
3.



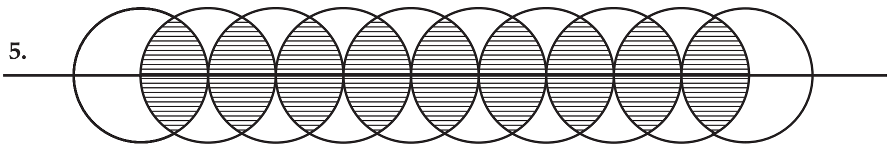
9.



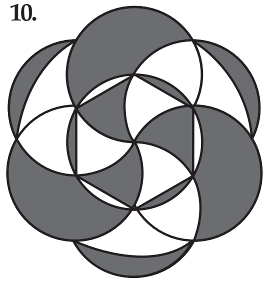
4.



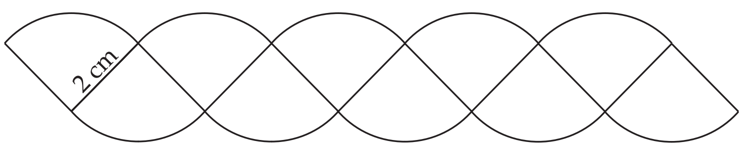
5.



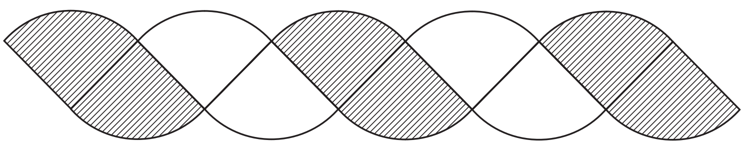
10.



6.



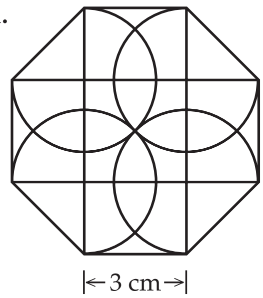
7.



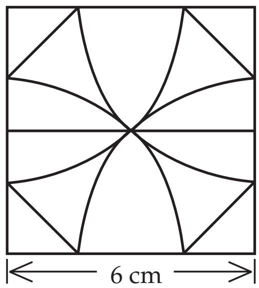
Desde el inicio es conveniente poner en práctica una pedagogía que desarrolle en los alumnos la apreciación por los dibujos precisos, hechos con propiedad y limpieza, evitando, sin embargo, que este aspecto se vuelva más importante que el contenido matemático de la tarea. Se sugiere que los alumnos abran una carpeta para coleccionar sus dibujos y donde el profesor pueda evaluar sus progresos.

No hay enseñanza sin objetivos. Por ello es bueno tener claridad en los propósitos que se persiguen al asignar un trabajo de dibujo y trazos geométricos. Así, el profesor podrá orientar su esfuerzo pedagógico y proponer tareas acordes con los objetivos buscados. Al principio, cuando se quiere que los alumnos adquieran soltura en el uso libre de los instrumentos de dibujo, podrán realizar dibujos como los que se presentan en seguida:

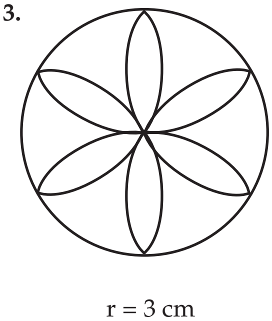
1.



2.

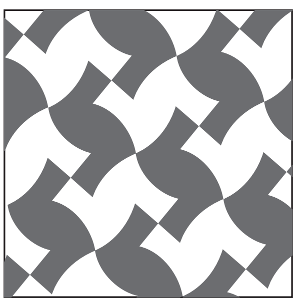


3.

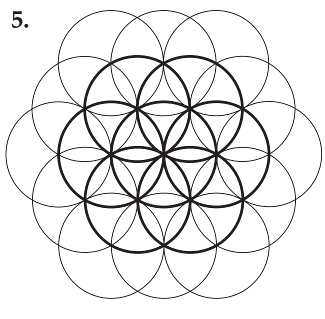


Para orientar la actividad de los alumnos hacia un trabajo cuidadoso, hecho con instrumentos muy precisos, puede solicitárseles la reproducción de figuras como éstas:

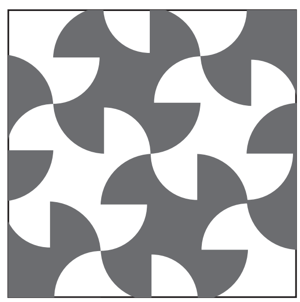
4.



5.

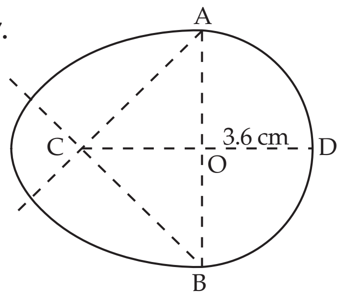


6.

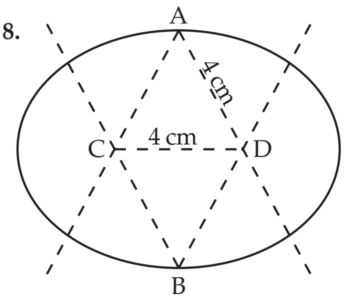


En cambio, si quiere utilizarse el dibujo como un medio para presentar problemas sencillos de geometría, cuya resolución requiera de un pequeño análisis de la figura y la construcción de trazos auxiliares, convendrá proponerles que resuelvan ejercicios como los siguientes:

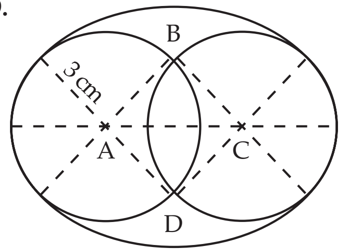
7.



8.



9.



No es conveniente limitar las actividades de dibujo geométrico a la sola reproducción y copiado de figuras previamente dibujadas sobre papel, pues es necesario que los alumnos aprendan también a seguir los pasos de una construcción dados por escrito o mediante una secuencia de figuras.

Por ejemplo

1. Toma una regla, traza una recta de 10 cm de longitud y llama A y B a sus extremos, luego:

a) Traza un círculo con centro en A y de radio mayor que 5 cm.

b) Con la misma apertura del compás, traza un círculo con centro en B y marca con rojo los puntos donde se intersectan los círculos que trazaste.

Sobre la misma figura repite muchas veces los pasos *a)* y *b)*, tomando cada vez círculos de radios mayores que 5 cm. ¿Qué observas? ¿Cómo se designa a la recta que obtuviste? ¿Qué propiedades tiene?

2. Toma una regla, traza un segmento de 10 cm de longitud y llama A y B a sus extremos, luego:

a) Traza una recta que pase por A y llámala d_1.

b) Traza desde B la perpendicular a d_1 y marca con rojo el punto de intersección de la perpendicular que trazaste y la recta d_1.

c) Traza otra recta que pase por A y llámala d_2.

d) Traza desde B la perpendicular a d_2 y marca otra vez con rojo el punto de intersección de la perpendicular que acabas de trazar y la recta d_2.

Repite varias veces los pasos anteriores trazando rectas d_3, d_4, ...que pasen por A. ¿Cómo se llama la curva que forman los puntos rojos? (Si todavía no la reconoces, encuentra más puntos y márcalos con rojo.)

3. Traza un círculo de 2 cm de radio, marca un punto de su circunferencia y llámalo A, luego:

a) Toma otro punto M_1 sobre la circunferencia y traza la recta que pasa por A y M_1.

b) En la recta que pasa por A y M_1, marca con rojo los puntos N_1 y P_1 que satisfacen:

$$M_1N_1 = M_1P_1 = 4 \text{ cm}$$

Continúa el mismo proceso tomando muchos puntos M_2, M_3, M_4, ..., sobre la circunferencia (verás aparecer una curva que los matemáticos llaman *conchoide del círculo*). □

En las actividades de dibujo y trazos geométricos, los alumnos se expresan por medio del uso correcto de los instrumentos de dibujo, incluido un lápiz bien afilado. No obstante, es importante que aprendan a describir, verbalmente o por escrito, una figura o los pasos que se siguen en una construcción. De esta manera, podrán apropiarse gradualmente del vocabulario y el lenguaje utilizados en la geometría y aprenderán a utilizarlo correctamente. Asimismo, se les ayudará a desarrollar su habilidad para comunicar y expresar su pensamiento y prepararse para acceder más tarde al razonamiento deductivo.

Sin embargo, antes de pedir que se describa una figura o los pasos de una construcción, es necesario que esta actividad haya adquirido sentido para los alumnos a partir de diversas situaciones.

Por ejemplo

1. Organice equipos de dos alumnos, a continuación déle a uno de ellos una tarjeta con una figura dibujada con la consigna de transmitirla verbalmente a su compañero, de modo que éste pueda dibujarla sin verla.

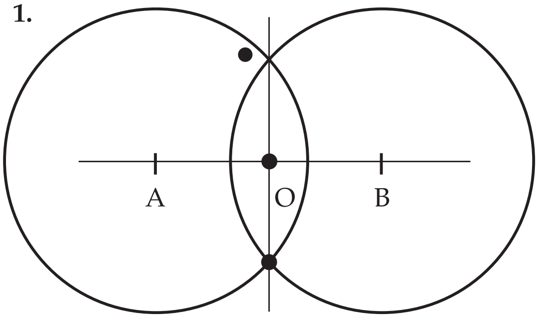
El diálogo que se establezca entre los dos alumnos, así como lo que se observe al contrastar la figura trasmitida con la original, favorecerán la comprensión de la importancia de utilizar un lenguaje preciso en la comunicación.

Construcciones con regla y compás

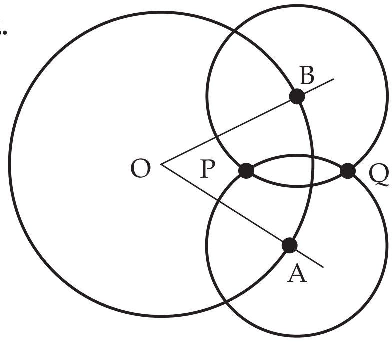
Las construcciones utilizando sólo regla sin graduar y compás, también llamadas *construcciones euclideanas*, constituyen uno de los temas tradicionales de la geometría. Este tema está lleno de situaciones y problemas interesantes que pueden plantearse a los alumnos para que los resuelvan; al principio de manera informal e intuitiva y, más tarde, justificando sus construcciones.

Puede comenzarse con problemas sencillos, donde se exploten las propiedades de simetría de algunas figuras para que los alumnos se acostumbren y practiquen las construcciones básicas. Así, las siguientes figuras podrán servir como punto de partida para el trazo de mediatrices, perpendiculares, bisectrices y paralelas.

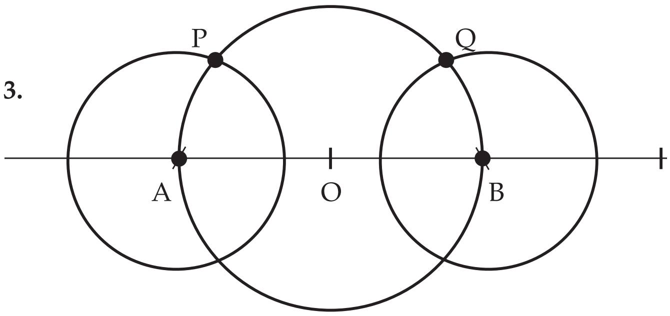
1.



2.



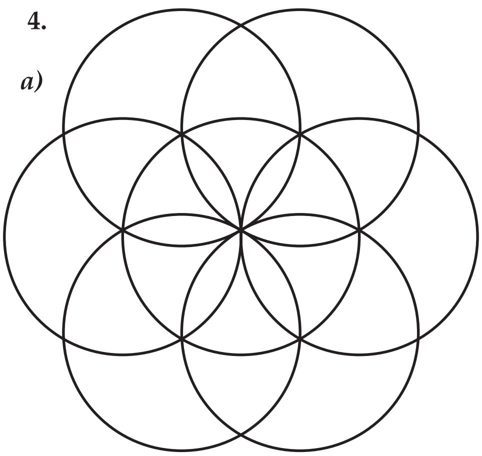
3.



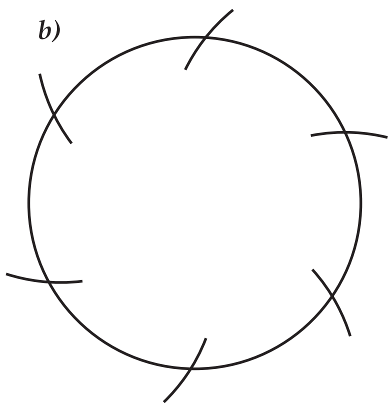
En este momento no conviene tratar de economizar trazos auxiliares, pues es preferible presentarlos completos, de manera que no se oculten las relaciones entre ellos. Por ejemplo, para los alumnos será más fácil comprender y recordar la construcción del hexágono regular a partir de la figura de la izquierda que si sólo se les dan los trazos de la derecha.

4.

a)



b)



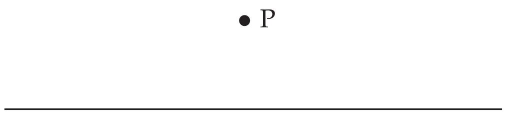
Construcciones que parecen simples y sin mayores dificultades, pueden dar lugar a situaciones y actividades que ayuden a los alumnos a comprender la utilidad de los instrumentos de dibujo.

Los alumnos deberán tener la oportunidad de practicar constantemente los trazos y construcciones usuales de la geometría, así como saber utilizarlos y adaptarlos para realizar otras construcciones diferentes. Como se dijo en párrafos anteriores, es necesario que durante este proceso aprendan a realizar una construcción siguiendo una lista de instrucciones o una secuencia de figuras. Recíprocamente, también deberán aprender a describir los pasos de una construcción. En este sentido, una actividad interesante es presentarles el punto de partida y el resultado final de una construcción y pedirles que recuperen y describan los pasos intermedios.

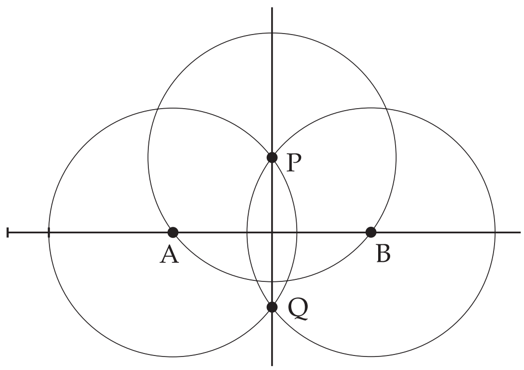
Por ejemplo. Construcción de perpendiculares

1. Desde un punto P exterior a una recta:

a) Punto de partida

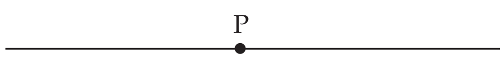


b) Resultado final

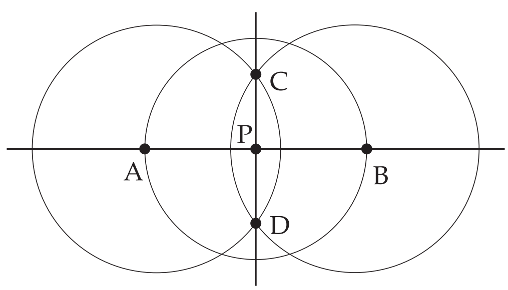


2. Por un punto P sobre la recta:

a) Punto de partida

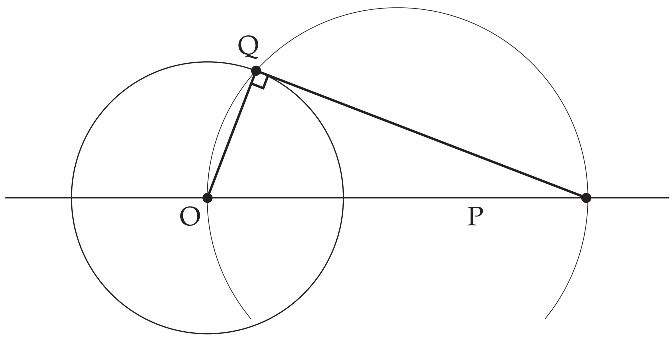


b) Resultado final



Más adelante, cuando los alumnos tengan más experiencia y hayan avanzado en el razonamiento deductivo, lograrán resolver problemas de construcción menos sencillos que requieran de un pequeño razonamiento.

Por ejemplo

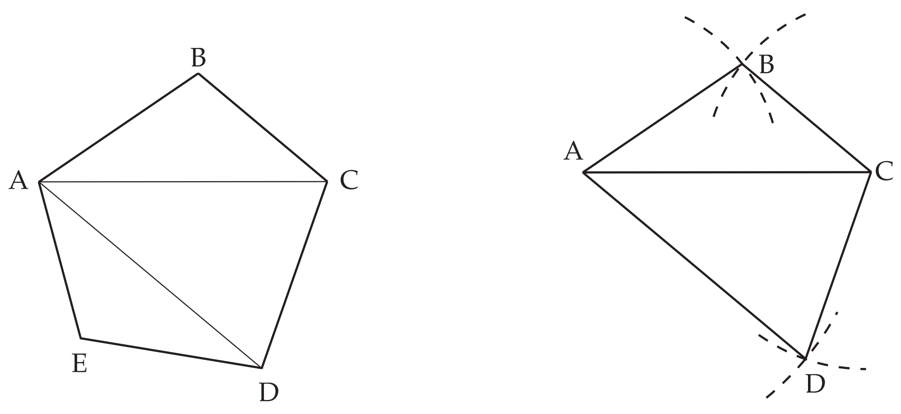


1. A partir del conocimiento del teorema del ángulo semiinscrito y del análisis de la siguiente figura, un alumno de tercer grado será capaz de hacerlo. Descubrir y justificar cómo construir la tangente a una circunferencia desde un punto exterior P.

Figuras básicas y simetría

Las figuras básicas

En general, los problemas y aplicaciones de la geometría tratan de situaciones y figuras más complicadas que los triángulos, los círculos y los cuadriláteros. Pero ocurre que al intentar resolverlos, descubrimos que su solución depende de que se hayan estudiado y se conozcan bien estas figuras simples. El mejor ejemplo es la trigonometría, donde todos los problemas se reducen en última instancia a resolver triángulos. Sin embargo, no hay que llegar tan lejos para encontrar ejemplos del papel que juegan figuras como el triángulo en la resolución de problemas. Situaciones tan sencillas como reproducir un polígono irregular, o calcular su área, se pueden resolver triangulando; esto es, se divide el polígono en triángulos y luego, según el caso, se reproduce triángulo por triángulo o se suman las áreas de los triángulos que lo forman.



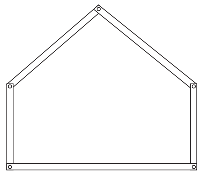
Para reproducir un polígono, primero lo triangulamos… *luego lo reproducimos triángulo a triángulo.*

Quizás la propiedad más importante del triángulo es que está totalmente determinado por las longitudes de sus lados, esto es, se trata de una figura rígida.

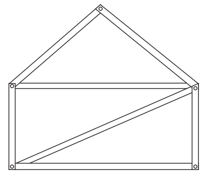
Por ejemplo

1. Si tomamos tres tiras de madera y las unimos con tornillos por sus extremos para formar un triángulo, obtenemos una figura indeformable. Una actividad que los alumnos podrán realizar consiste en utilizar tiras para construir polígonos con un mayor número de lados y observar que no son indeformables a menos que se triangulen, es decir, que se agreguen tiras para que el polígono quede dividido en triángulos.

Este es un hecho que tiene consecuencias importantes, por ejemplo, en el terreno de la construcción.



Este pentágono no es rígido, puede deformarse…,

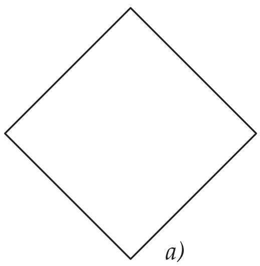


pero si agregamos tiras para triangularlo, entonces ya no puede deformarse

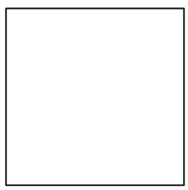
Aunque las actividades anteriores se refieren a triángulos, existen muchas otras situaciones que podrán servir para interesar a los alumnos en las otras figuras básicas y sus propiedades y, al mismo tiempo, ayudarlos a comprender por qué el estudio de estas figuras es tan importante en la geometría.

Con frecuencia, las ideas de los alumnos a propósito de las figuras geométricas no se corresponden exactamente con las definiciones que se les proporcionan.

2. Observa las siguientes figuras y discute con tus compañeros: ¿Son dos rombos? ¿Son cuadrados? ¿Es un rombo y un cuadrado?



a)



b)

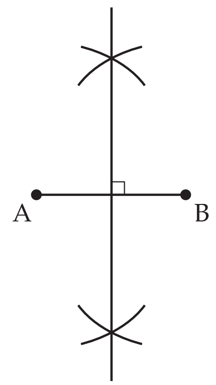
No es raro encontrar alumnos para quienes una figura es un cuadrado o un rombo dependiendo de la posición en la que se presentan; si está como la figura *a)* es un rombo, y si está como la figura *b),* un cuadrado.

Para que los alumnos perciban que la posición no es importante en estos casos, es conveniente que se acostumbren a ver las figuras geométricas dibujadas en diferentes posiciones. Sin embargo, reacciones como las anteriores tienen causas más profundas y revelan el grado de madurez geométrica alcanzado por los alumnos. Muchos de ellos ven una figura como un todo y sólo la reconocen por su forma física, sin prestar atención a sus partes, ni percibir las relaciones existentes entre ellas. Así, no hay por qué extrañarse de que no reconozcan un cuadrado como un caso particular de un rectángulo, o de que para ellos dos rectas perpendiculares sean siempre una vertical y una horizontal que se intersectan.

Las definiciones difícilmente van a modificar las ideas de los alumnos si no se acompañan de actividades que los conduzcan a explorar de manera informal las propiedades de las figuras básicas, con objeto de que puedan reconocer aquellas que son relevantes para la resolución de problemas y el razonamiento geométrico.

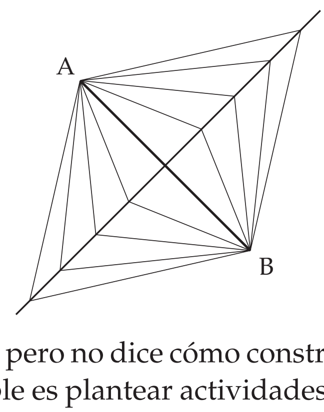
A modo de ejemplo, consideremos la siguiente definición de la mediatriz de un segmento:

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.



Esta definición dice mucho de cómo construir una mediatriz, pero muy poco de la forma cómo funciona en el razonamiento geométrico. Consideremos ahora la siguiente definición:

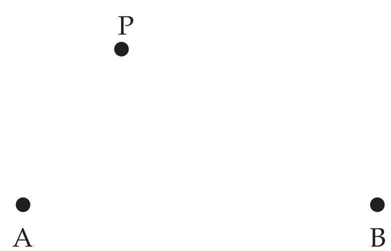
La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.



Esta definición es muy útil para resolver problemas, pero no dice cómo construir la mediatriz de un segmento. Entonces lo recomendable es plantear actividades para que los alumnos exploren y se acostumbren a las propiedades de la bisectriz como lugar geométrico, sin limitarse a la pura memorización de las definiciones.

Por ejemplo

1. Considera los siguientes puntos:



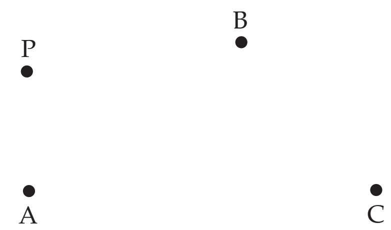
El punto P está más cerca de A que de B:

a) ¿Puedes señalar otros puntos que estén más cerca de A que de B? ¿Y algunos puntos que estén más cerca de B que de A?

b) Ilumina con rojo la región del plano donde se encuentran *todos* los puntos que están más cerca de A que de B y de azul la región donde se encuentran todos los puntos que están más cerca de B que de A.

c) ¿Dónde se encuentran los puntos que están a la misma distancia de A que de B? ¿Cómo se llama esta recta?

2. Considera los siguientes puntos.



El punto P está más cerca de A que de B, pero más cerca de B que de C:

a) ¿Qué otros casos pueden presentarse? Ilumina con colores diferentes las regiones donde se cumple cada uno de esos casos.

b) Las regiones que coloreaste tienen un vértice en común. ¿Qué propiedad tiene este punto? □

Al resolver el problema anterior los estudiantes estarán resolviendo también, de una manera informal y sin recurrir a un razonamiento deductivo, los siguientes problemas:

Las mediatrices de un triángulo concurren en un punto.

El círculo que pasa por tres puntos tiene su centro en la intersección de las mediatrices de los segmentos definidos por los puntos.

Problemas a partir de condiciones dadas

El dibujo y los trazos geométricos, la exploración de las simetrías de las figuras y otros aspectos de la geometría están llenos de situaciones interesantes. El profesor podrá utilizarlas para que sus alumnos investiguen las relaciones entre los elementos de las figuras, descubran sus propiedades características y aprendan a utilizarlas en la solución de problemas.

Las primeras actividades tendrán como propósito la utilización de los instrumentos de dibujo y medida para trazar las figuras básicas y otras formadas por su composición. Es recomendable plantear actividades y problemas diversos y de distintos grados de dificultad, desde situaciones muy sencillas —para que los alumnos se familiaricen con las definiciones de las figuras y practiquen los trazos básicos—, hasta pequeños problemas de construcción, donde se les proporcionen algunos datos que determinen una figura y se les pida trazarla.

Por ejemplo

1. Trazar el círculo con centro en un punto O y radio igual 3.5 cm.

2. Construir el triángulo ABC sabiendo que AB = 5 cm, BC = 6 cm y CA = 7 cm.

3. Dibujar el cuadrado ABCD cuyos lados AB, BC, CD y DA miden 6.8 cm.

4. Trazar el rectángulo PQRS de lados PQ = 4.5 cm y QR = 6.3 cm.

5. Dibujar el triángulo MNP de lados MN = 7.5 cm, NP = 7.5 cm y PM = 5 cm.

6. Trazar el triángulo XYZ tal que XY = 6 cm, XZ = 7.5 cm y ángulo ZXY = 35º.

7. Dibujar un segmento AB de 7 cm de longitud y trazar el círculo que pasa por sus extremos y lo tiene como diámetro.

8. Construir el cuadrado XYZW sabiendo que sus diagonales XZ y YW miden 10 cm de longitud.

9. Dibujar el rectángulo IJKL sabiendo que sus diagonales IK y JL miden 9cm y se intersectan formando un ángulo de 50º.

10. Trazar el rombo ABCD tal que sus diagonales midan respectivamente AC = 9cm y BD = 6 cm de longitud.

11. Construir el rombo TUVW sabiendo que sus lados miden 5cm y una de las diagonales mide 6 cm.

12. Trazar el rectángulo PQRS sabiendo que el lado PQ mide 6cm y la diagonal PR mide 10 cm. □

Explorar las propiedades de las figuras geométricas

Es recomendable diseñar actividades más abiertas y favorables a la exploración de las propiedades de las figuras geométricas, sin limitarse a ejercicios que sólo piden construir una figura a la vez. En particular, convendrá proponer actividades y problemas para que los alumnos se familiaricen gradualmente con las situaciones claves de la geometría y aprendan a reconocerlas.

Por ejemplo

1. Para cada inciso dibuja, si es posible, un triángulo DEF con las medidas indicadas:

a) DE = 3 cm, EF = 4 cm y FD = 5 cm

b) DE = 4 cm, EF = 5 cm y FD = 10 cm

c) DE = 5 cm, EF = 7 cm y FD = 5 cm

d) DE = 8 cm, EF = 3 cm y FD = 4 cm

¿Pudiste construir el triángulo solicitado en todos los casos? ¿Puedes dar otros ejemplos donde no se pueda construir un triángulo? Explica.

2. Dibuja todas las figuras que pueden formarse juntando cuatro triángulos rectángulos isósceles del mismo tamaño, bajo la condición de que al juntarse dos triángulos tengan un lado común. Realiza lo mismo utilizando cualquiera de los cuatro triángulos rectángulos de forma y tamaño idénticos; cualquiera de los cuatro triángulos iguales, aunque no sean rectángulos. Indica en cada caso las figuras que obtienes.

3. Dibuja un segmento XY de 4 cm de longitud y traza a continuación varios triángulos isósceles tomando como base este segmento; marca con rojo el tercer vértice de cada triángulo que dibujaste. ¿Qué observas? Explica.

4. Dibuja un segmento AB de 6 cm de longitud y traza a continuación varios rombos que tengan como diagonal este segmento; marca con rojo los otros dos vértices de cada rombo que dibujaste. ¿Qué observas? Explica.

5. Dibuja un segmento PQ de 4 cm de longitud; luego traza varios círculos que pasen por los extremos P y Q del segmento y marca con rojo sus centros. ¿Qué observas? Explica.

6. Considera un cuadrilátero ABCD y llama O al punto donde se intersectan sus diagonales AC y BD. Para cada inciso, dibuja el cuadrilátero de manera que satisfaga las condiciones dadas. Indica en cada caso el nombre del cuadrilátero que dibujaste (más adelante aprenderás a justificar tu respuesta).

a) $AC = 10$ cm; $BD = 6$ cm
$AO = OC$; $BO = OD$
$AC \perp BD$

b) $AC = BD = 8$ cm
$AO = OC$; $BO = OD$
$AC \perp BD$

c) $AC = 10$ cm; $BD = 6$ cm
$AO = OC$; $BO = OD$
$AB \neq BC$

d) $AC = BD = 8$ cm
$AO = OC$; $BO = OD$
$AB \neq BC$

7. Dibuja un círculo con centro en un punto O; luego toma varios puntos P_1, P_2, P_3 ... sobre el círculo y marca con rojo los puntos medios de los segmentos OP_1, OP_2, OP_3, ... ¿Qué observas? Explica.

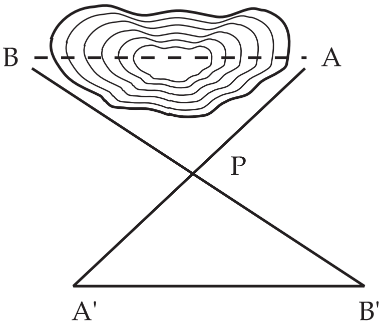
8. Marca un punto O y dibuja varios círculos de 4 cm de radio que pasen por él. Marca con rojo los centros de los círculos que dibujaste. ¿Qué observas? Explica.

9. Traza un círculo de 4 cm de radio con centro en un punto O; luego traza una cuerda que mida 5 cm de longitud; traza muchas cuerdas que midan 5 cm hasta que te des cuenta de la figura que se está formando en el centro. Explica.

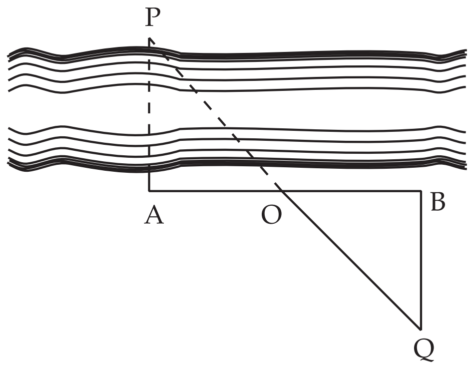
10. Dibuja un segmento AB de 8 cm de longitud y traza luego varios rectángulos que tengan como diagonal este segmento. Marca con rojo los otros dos vértices de cada rectángulo que dibujaste. ¿Qué observas?

11. Las siguientes figuras sugieren dos métodos para medir el ancho de una laguna y un río, respectivamente. Explica cómo aplicarías estos métodos en la práctica.

a)



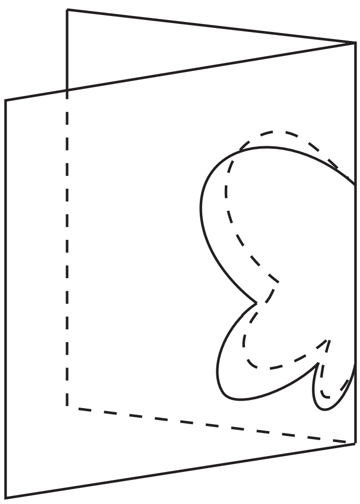
b)

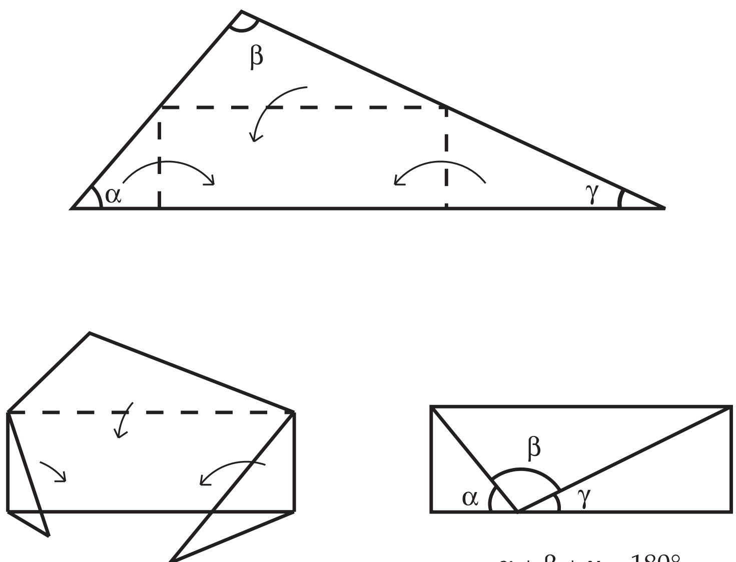


Materiales y recursos didácticos para el estudio de la geometría

Para el estudio de las figuras básicas y, en general, de la geometría, podrán aprovecharse, cada vez que se crea necesario y se juzgue conveniente, las oportunidades que ofrecen materiales y recursos didácticos, como son el papel doblado, el papel cuadriculado, el geoplano y, en general, la construcción y manipulación de modelos u otros objetos físicos, y donde sea posible el uso de la computadora.

El papel doblado puede ser utilizado para verificar la simetría de ciertas figuras.





$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

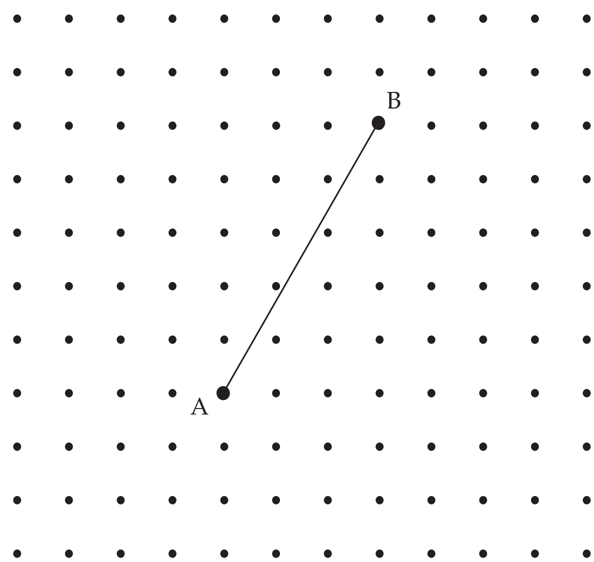
Más adelante, el papel doblado puede ser utilizado para ver de manera informal que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

El papel cuadriculado y el geoplano también dan lugar a situaciones y problemas interesantes de explorar:

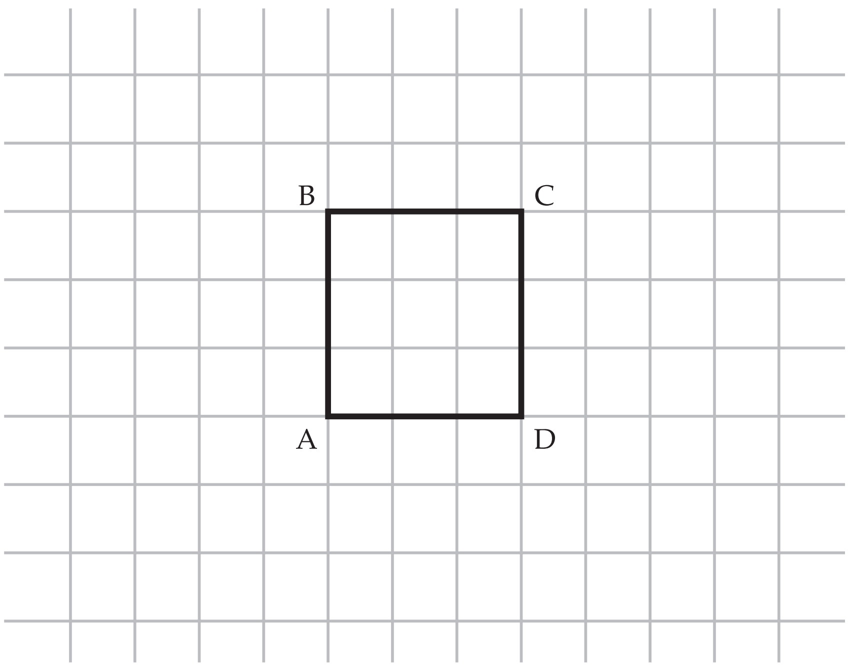
1. En una hoja de papel cuadriculado dibuja todos los rectángulos diferentes de área igual a 36 cuadritos, cuyas dimensiones sean números enteros (los rectángulos de dimensiones como 18×2 y 2×18 se consideran iguales). ¿Cuál es el de menor perímetro?

2. En una hoja de papel cuadriculado dibuja todos los rectángulos de perímetro igual a 48 unidades, cuyas dimensiones sean números enteros. ¿Cuál es el de mayor área?

3. Construye un cuadrado que tenga como uno de sus lados (o de sus diagonales) el segmento que aparece a la derecha.



4. Dibuja sobre papel cuadriculado un cuadrado que tenga el doble de área del que aparece a continuación.



Simetría y transformaciones geométricas

El estudio de las simetrías de las figuras sirve a los alumnos para familiarizarse con sus propiedades. Muchos resultados y teoremas de la geometría que al inicio de su aprendizaje no pueden tratarse formal o deductivamente, se vuelven con facilidad reconocibles cuando se estudian desde el punto de vista de la simetría de las figuras.

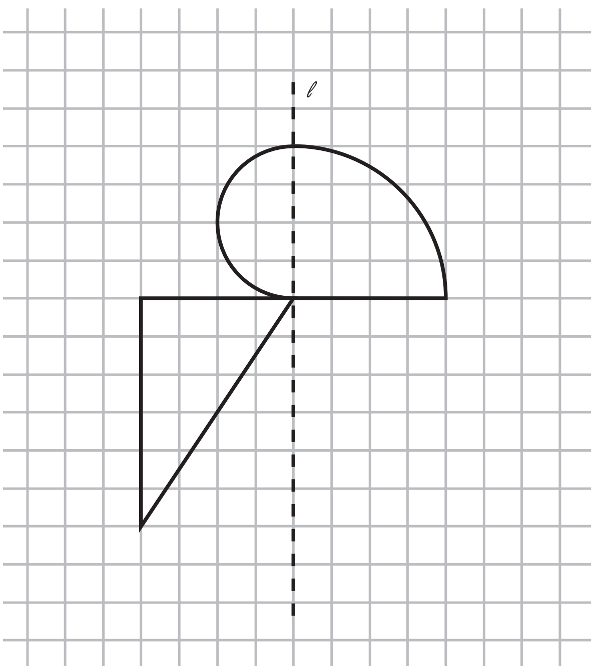
En el primer año, el énfasis está puesto en el estudio de la simetría axial, también llamada bilateral, como una propiedad de las figuras, por medio de actividades que favorezcan las manipulaciones, el dibujo y la medida. El trazado y determinación de ejes de simetría, en particular de las figuras básicas, ayudan a que los alumnos visualicen las relaciones entre los elementos de una figura y aprendan a utilizarlas en la resolución de problemas, así como en los trazos y construcciones geométricas.

Además del trazado de ejes de simetría, se sugiere proponer otros tipos de actividades. Por ejemplo, los alumnos podrán completar una figura para que sea simétrica respecto a una recta dada e indicar los elementos que resultan iguales debido a la simetría. Una variación que conduce a exploraciones interesantes, y los prepara para temas que serán vistos posteriormente, consiste en completar una figura para obtener otra que sea simétrica respecto a dos rectas l y m dadas, esto es, que las rectas l y m sean dos ejes de simetría de la figura resultante.

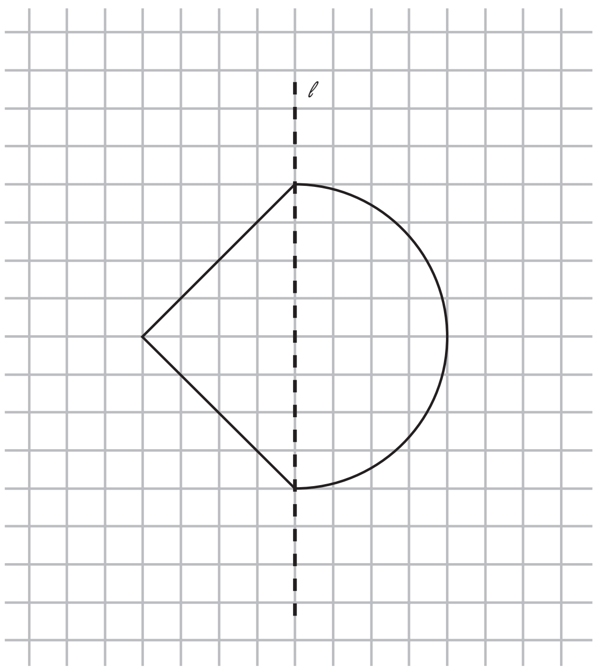
Por ejemplo

1. Copia las siguientes figuras en tu cuaderno. Luego complétalas de manera que, en cada inciso, la línea punteada ℓ sea un eje de simetría de la figura resultante.

a)

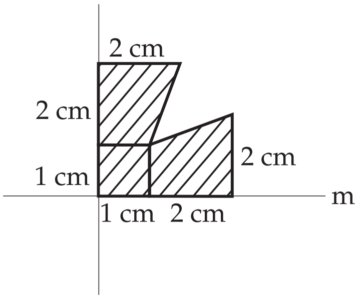


b)

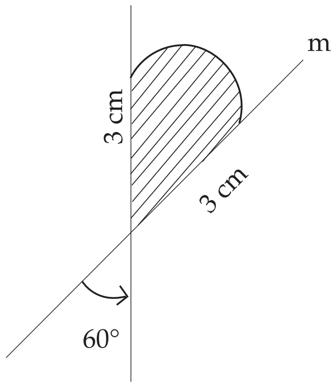


2. Copia y completa la figura dada en cada inciso para obtener otra que sea simétrica respecto a las rectas ℓ y m. Es decir, se trata de que completes cada figura de manera que las rectas indicadas sean ejes de simetría de la figura resultante.

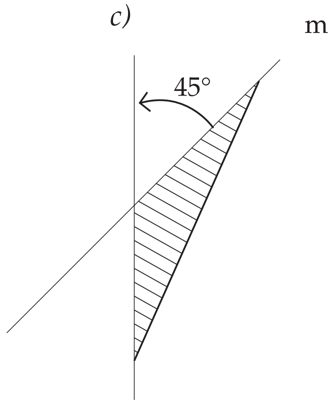
a)



b)



c)

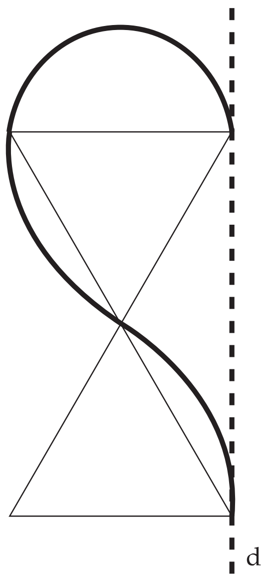


Más adelante, se podrán proponer problemas que requieran de un análisis más cuidadoso de la figura o de un pequeño razonamiento.

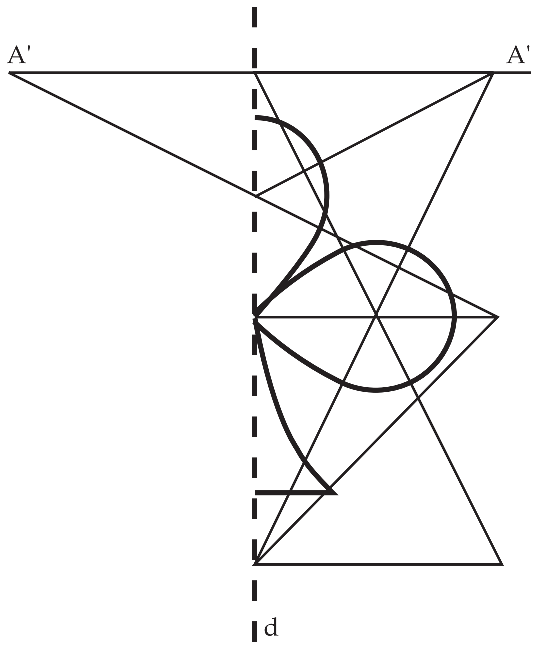
Por ejemplo

1. Las figuras que aparecen en cada inciso están formadas de arcos de círculo cuyos centros hay que encontrar, completarlas de manera que sean simétricas respecto al eje *d* (*atención:* no se vale medir o utilizar regla graduada o escuadras).

a)

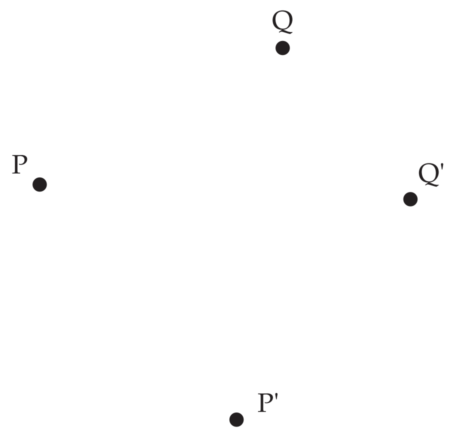


b)

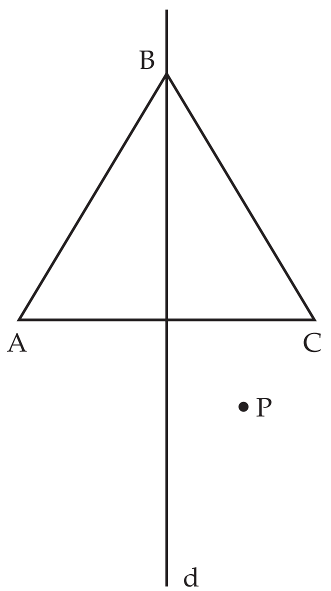


Los puntos A y A′ son simétricos con respecto a la recta d.

2. Los puntos P' y Q' son los simétricos de P y Q respecto a una recta *l*. Encuentra esta recta usando sólo la regla sin graduar.



3. La recta *d* es un eje de simetría del triángulo. Encuentra el simétrico de P utilizando sólo regla sin graduar.



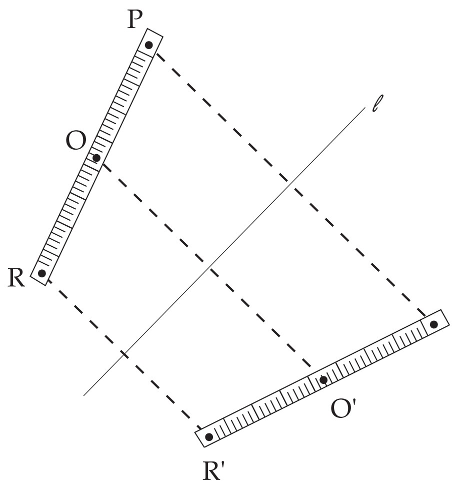
Otra actividad interesante es pedir a los alumnos investigar las relaciones entre el número de ejes de simetría y las propiedades de regularidad de un polígono. Así podrán descubrir propiedades como las siguientes:

Un triángulo sólo puede tener un eje de simetría (si es isósceles), tres ejes de simetría (si es equilátero) o ningún eje de simetría (si es escaleno). No es posible que un triángulo tenga exactamente dos ejes de simetría.

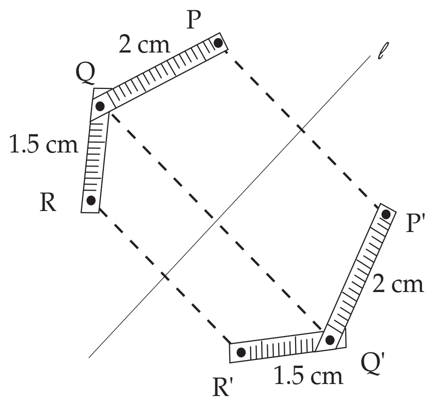
Un polígono regular tiene el mismo número de ejes de simetría que de lados.

En el segundo grado, las simetrías axial y central se estudiarán como transformaciones de una figura, a partir de actividades que permitan un acercamiento informal e intuitivo a estas nociones. Es importante que los alumnos observen las propiedades de isometría de estas transformaciones: conservación de la colinealidad, de las distancias y de los ángulos, y las utilicen en la resolución de problemas muy diversos.

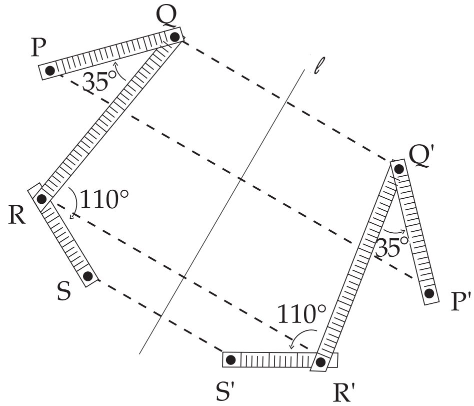
1. *Una reflexión conserva colinealidad, es decir, si tres puntos están alineados, sus simétricos también lo están.*



2. *Una reflexión conserva las distancias.*

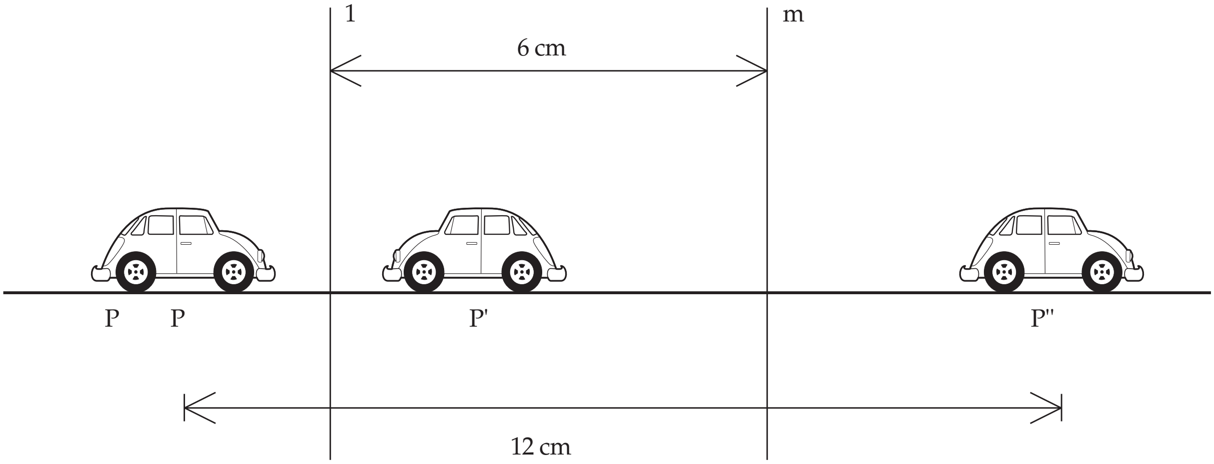


3. *Una reflexión conserva los ángulos.*

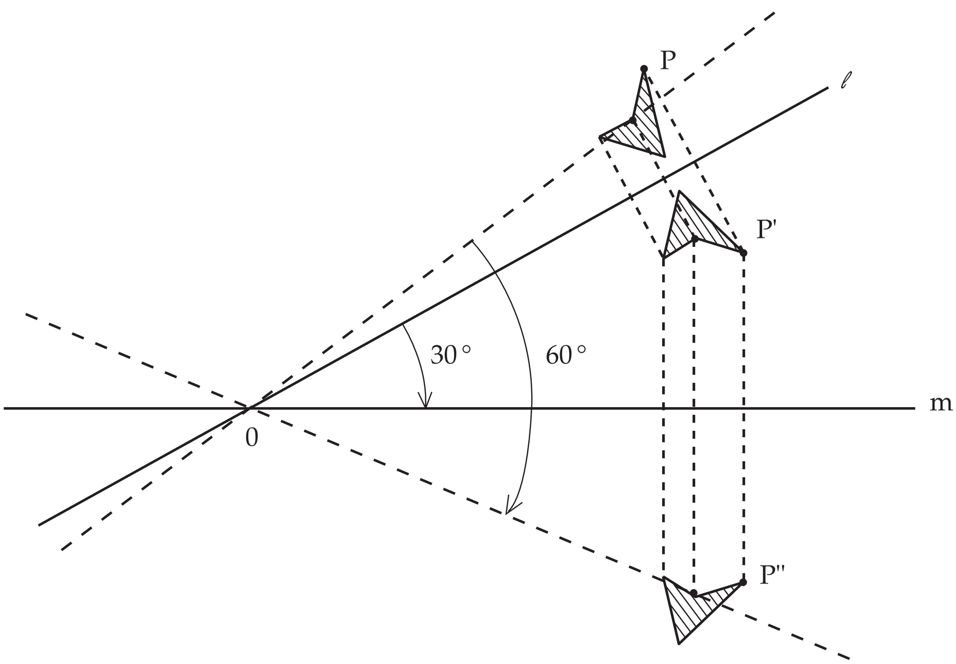


Conviene plantear actividades para que los alumnos observen las transformaciones que se obtienen al componer dos reflexiones respecto a dos rectas diferentes. Dependiendo del caso se obtiene:

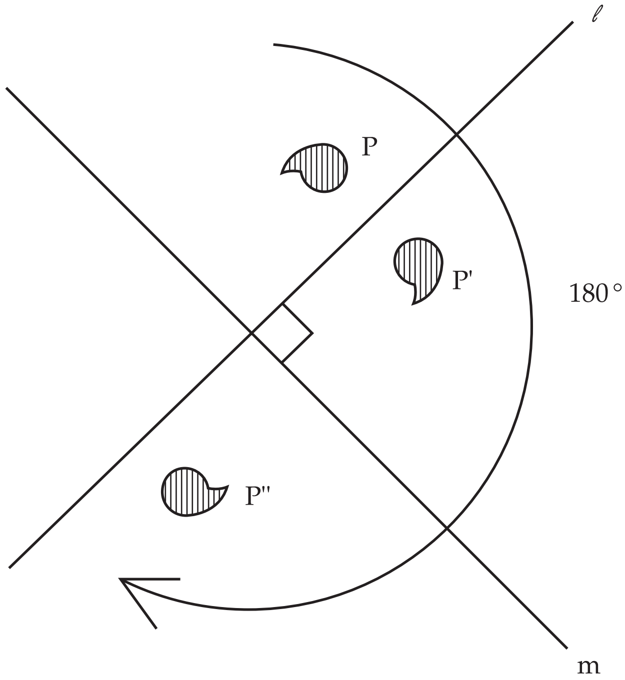
a) *Si las dos rectas son paralelas*, una translación cuya amplitud es el doble de la distancia entre las rectas:



b) *Si las dos rectas son secantes*, una rotación cuya amplitud es el doble del ángulo entre las rectas:



En particular, *si las dos rectas son perpendiculares*, se obtiene una rotación de 180º, es decir, una simetría central.



Homotecias

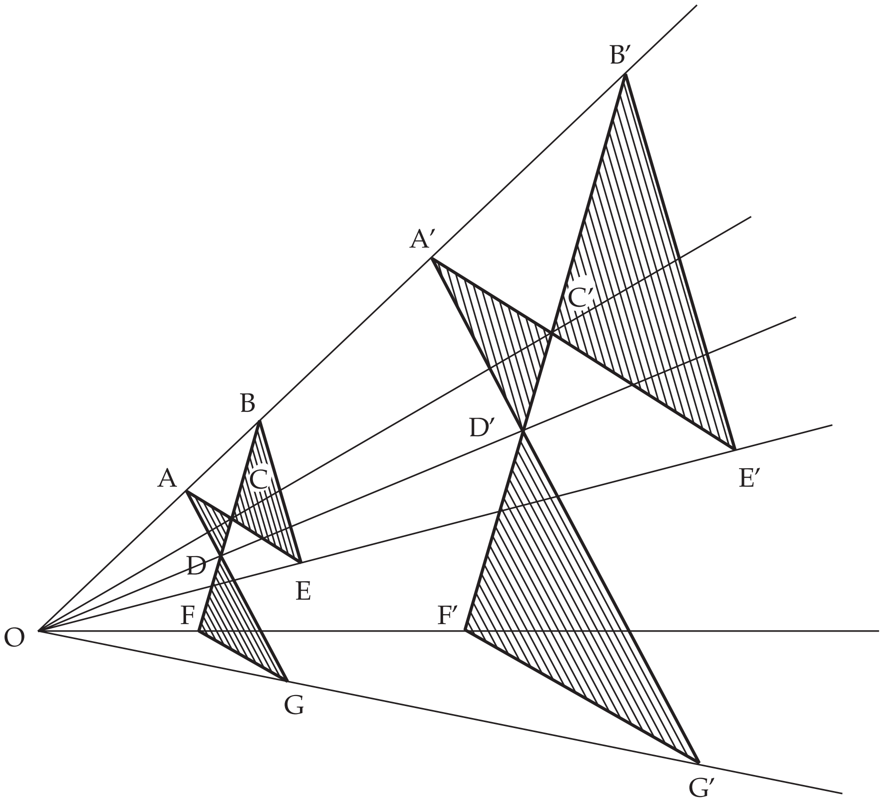
El programa contempla también el estudio de otro tipo de transformaciones geométricas distintas de las isometrías; se trata de las *homotecias*. En el segundo grado, este estudio comienza de manera informal a partir del dibujo a escala y se continúa, en el tercer grado, con la aplicación de la semejanza al estudio de las homotecias y de las homotecias en el dibujo a escala.

Una homotecia es una transformación del plano definida con la ayuda de un punto O y un número k, el cuál puede ser positivo o negativo, llamados *centro* y *razón de homotecia*, respectivamente.

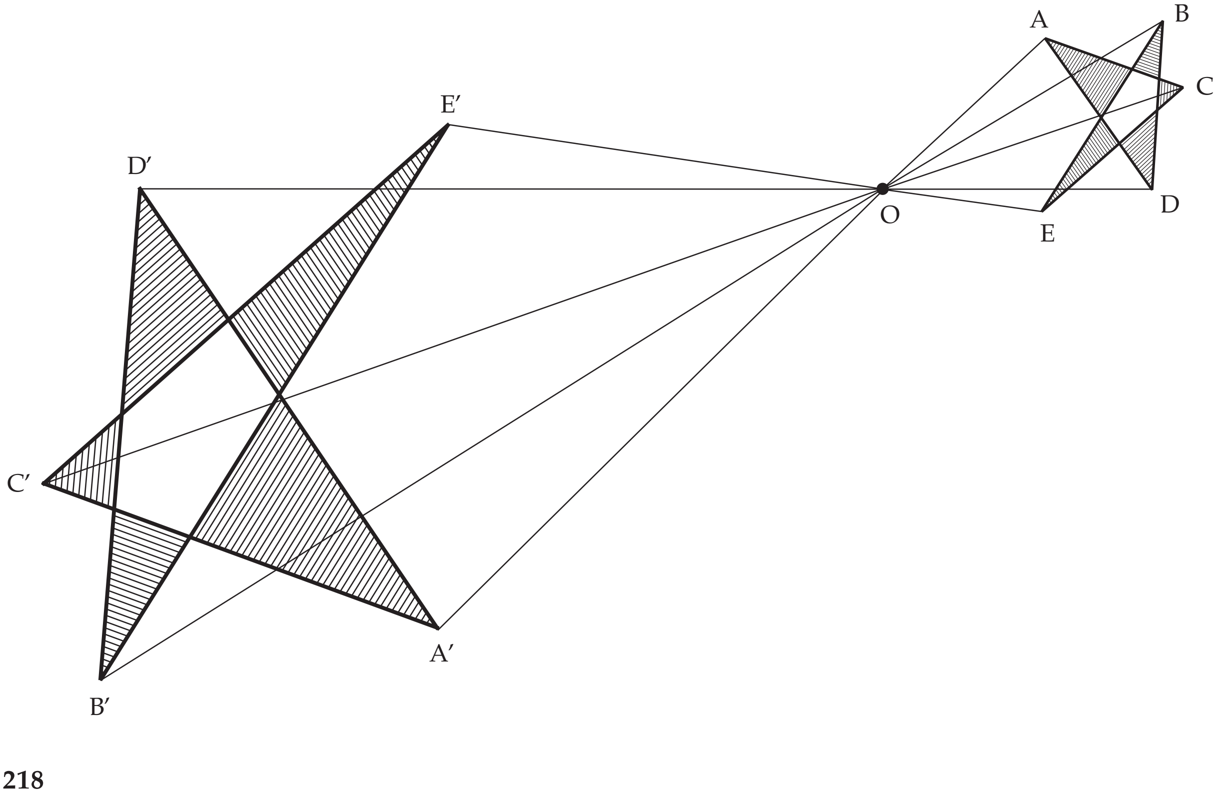
Antes de continuar, recordemos que un punto O divide a una recta en dos partes. Si además tenemos otro punto P, éste queda en uno u otro lado de O, por lo que podemos hablar del *"lado donde está P"* y del *"lado donde no está P"*.

En una homotecia:

- El punto O se transforma en sí mismo.
- Para obtener el transformado de un punto P, distinto de O, se traza la recta que pasa por O y P; luego:
- Si $k > 0$, tomamos sobre esta recta el punto P' situado a una distancia kOP del centro O, del mismo lado de O que P.



- Si $k < 0$, tomamos el punto P′ situado a una distancia $|k|$ OP del centro O, pero del lado de la recta donde no está P.



El dibujo a escala y el estudio de las homotecias deberán completarse con actividades y problemas para observar cómo se modifican las dimensiones lineales, el área y el volumen de una figura o cuerpo geométrico al reducirlo o aumentarlo a escala. Así podrá verse que al multiplicar por 2, 3, 4,... las dimensiones lineales, el área se multiplica por 4, 9, 16, ... y el volumen por 8, 27, 64, ...

En general, al multiplicar por k las dimensiones lineales de una figura o cuerpo, su perímetro se multiplica por k, su área por k^2 y su volumen por k^3.

Los alumnos se interesarán en temas como los anteriores si se les plantean diversos problemas que tengan que ver con las consecuencias del cambio de escala en la biología y otras situaciones.

Por ejemplo

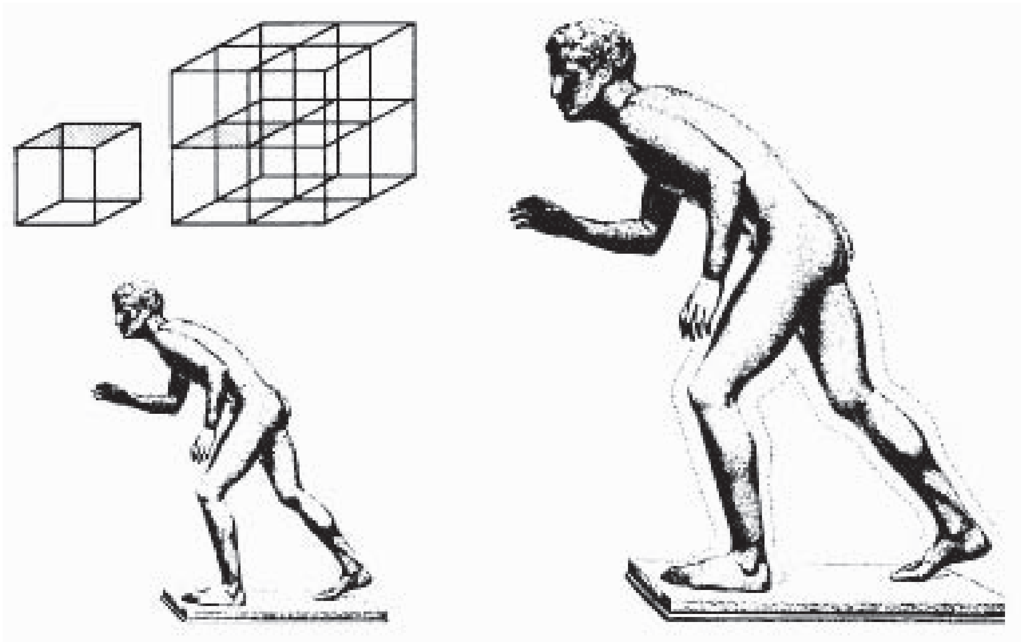
1. Si una persona de 1.75 m de estatura tiene un peso normal de aproximadamente 75 kg; entonces un gigante del doble de estatura, es decir, de 3.50 m, pero de las mismas proporciones, ¿cuánto pesará?

El gigante tendría que pesar ¡600 kg! Ahora bien, el peso del gigante aumenta ocho veces respecto del de una persona normal, pero el área de la sección transversal de sus piernas (o de sus tobillos), sólo aumenta cuatro veces.

2. Aplicando el mismo razonamiento a gigantes imaginarios de 3, 4, 5, ... veces la estatura normal, ¿cuál sería su peso?

Con esta situación se vería que su peso se multiplicaría por 27, 64, 125,... pero la sección transversal de sus tobillos sólo se multiplicaría por 9, 16, 25,... Esto significa que llegaría un momento en que sus tobillos no podrían soportar el peso y el gigante se desplomaría. Situaciones como ésta permitirán a los alumnos darse cuenta de las limitaciones que la forma impone al tamaño de los seres vivos, por lo que no existen insectos gigantes como los de las películas de ciencia ficción, al menos no en este mundo.

3. La torre Eiffel mide 320 m de altura y para construirla se utilizaron 7 000 t de acero, es decir, 7 000 000 kg. ¿Qué cantidad de acero se requeriría para construir un modelo a escala que midiera 1m de altura? (Sorprendentemente el resultado es menos de un cuarto de kilo, como puede verificarse haciendo los cálculos correspondientes.)



El tamaño de las cosas no es arbitrario y muchas veces está determinado por su forma. Si se duplican las dimensiones lineales de un objeto, su volumen se multiplica por ocho. El cubo grande de la ilustración solamente es dos veces más alto que el pequeño, pero contiene ocho cubos como el pequeño. Por otro lado, su sección sólo es cuatro veces mayor que la del pequeño. La misma ley se aplica a todos los cuerpos, incluido el cuerpo humano. La figura grande, que es dos veces más alta que la pequeña, tiene ocho veces su volumen y, por lo tanto, su peso. Pero el área transversal de sus piernas sólo es cuatro veces más grande. Las líneas punteadas de la figura grande muestran el grosor que deberían tener sus piernas para soportar un cuerpo dos veces más alto que el de la figura pequeña. Piernas tan gruesas serían agobiantes y ciertamente reducirían la movilidad humana, con la consecuente pérdida de eficiencia. Los grandes animales prehistóricos pudieron haber muerto a causa de la ineficiencia debida a su peso excesivo (Adaptado de Rowland, Kurt, The development of shape, *Gran Bretaña, Ginn, 1975).*

Medición y cálculo geométrico

Medición

El estudio de la geometría, y de las matemáticas en general, no consiste o puede reducirse solamente al estudio de ciertos conceptos y teoremas sobre las figuras geométricas y los números. Por el contrario, deberá acompañarse de diversas actividades y problemas de medición práctica y cálculo geométrico.

La medición juega un papel central en el estudio de la geometría porque ayuda a comprender su utilidad en la vida cotidiana, al mismo tiempo que desarrolla nociones y habilidades necesarias para el aprendizaje de esta disciplina.

Los alumnos necesitan comprender lo que se mide y crear sus propios procedimientos de medición para poder luego utilizar los instrumentos y comprender las fórmulas que se les proponen. Así, por ejemplo, la presentación de las fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes deberá estar precedida de actividades para revisar y enriquecer las nociones de área, desarrollar la imaginación espacial y comprender las relaciones que existen entre las nociones de capacidad y volumen. La enseñanza prematura de las fórmulas, sin que haya comprensión de las nociones anteriores, dificulta que se recuerden y utilicen para resolver problemas de medición y cálculo geométrico.

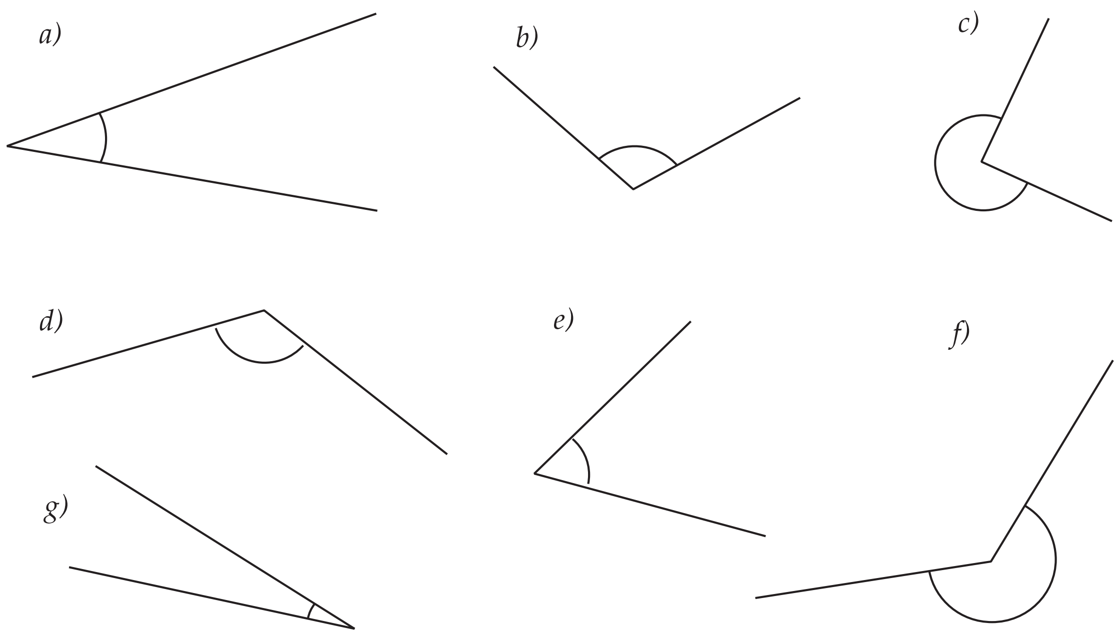
Deberá haber numerosas oportunidades de hacer uso efectivo de los instrumentos de medida y desarrollar el sentido de la medición práctica y la magnitud. Esto permitirá repasar las unidades usuales de longitud, superficie, volumen y capacidad. También ayudará a comprender otros aspectos importantes relacionados con las unidades e instrumentos de medida, por ejemplo, que su selección apropiada no sólo depende de la naturaleza del atributo que se quiere medir, sino también del tamaño del objeto por medir o del grado de precisión deseado en las medidas.

Deberán asimismo plantearse actividades para que se desarrolle y afine la noción de ángulo, se adquiera familiaridad con los distintos tipos de ángulos que pueden presentarse (agudos, rectos, obtusos, etcétera) y se utilice el transportador para medirlos, así como en la reproducción y trazado de figuras.

Por ejemplo, una actividad interesante es que al intentar reproducir un polígono o fabricar el plano de un terreno irregular de lados rectos, los alumnos se percaten de que además de los lados, necesitan medirse los ángulos.

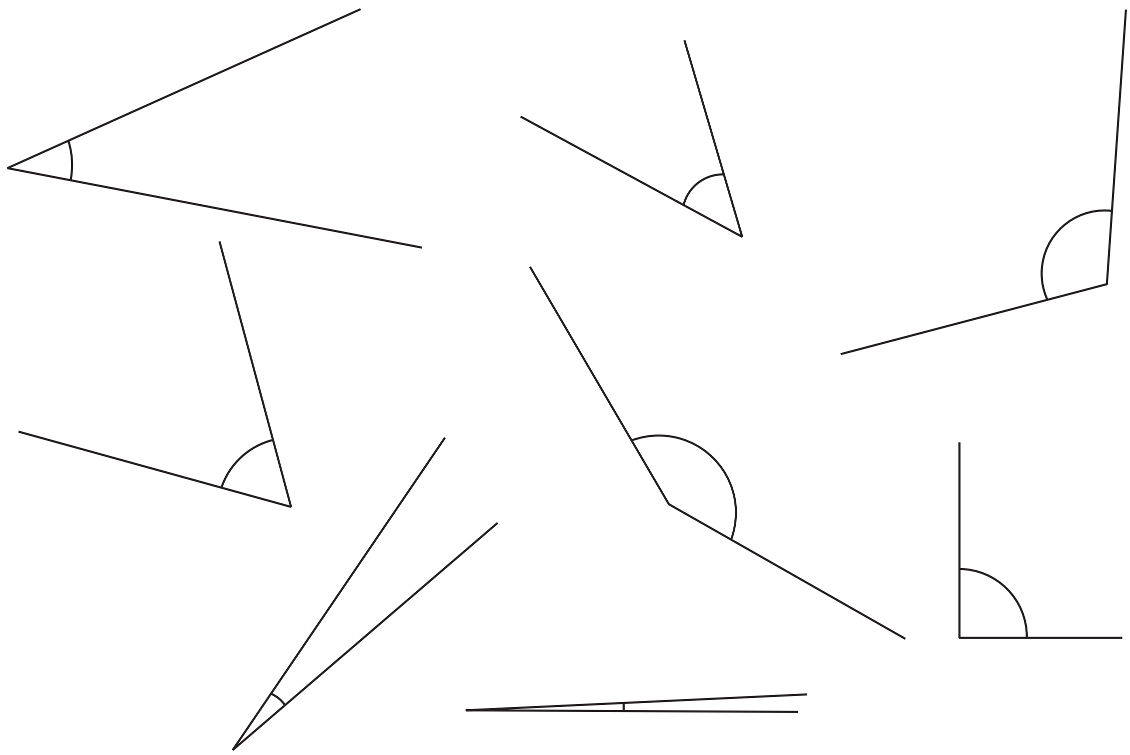
Por ejemplo

1. Mide con tu transportador los ángulos.



2. Sin utilizar el transportador, encuentra entre los siguientes valores el que le corresponde a cada ángulo.

100° 3° 150° 37° 15° 45° 90° 60°



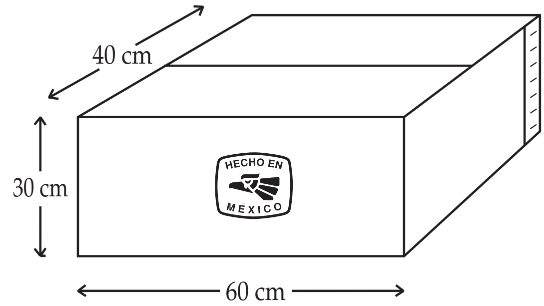
Es conveniente plantear actividades y problemas relacionados con situaciones de la vida cotidiana donde sólo se requiera estimar una magnitud y no necesariamente medirla o calcularla con precisión. La idea es que los alumnos puedan desarrollar estrategias de estimación y construir referentes que les sirvan para afinar su sentido de las magnitudes físicas, al mismo tiempo que se dan cuenta que las estimaciones admisibles dependen del contexto donde se realizan.

Cálculo de perímetros y áreas

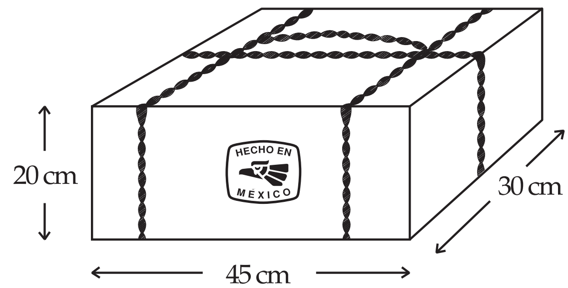
Los problemas que se limitan a presentar una figura con las dimensiones de sus lados indicadas para que los alumnos calculen su perímetro y área, no bastan para comprender estas nociones, por lo que deberán ser acompañados de otro tipo de actividades y problemas.

Por ejemplo

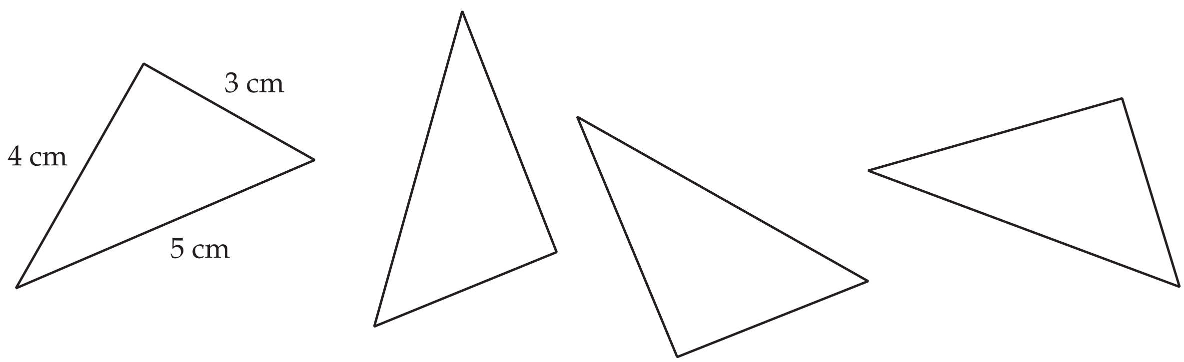
1. Las aristas de una caja como la de la figura se van a proteger con cinta plástica adhesiva. ¿Cuánta cinta se necesita? (La cinta tiene un grosor de 2.5 cm.)



2. Calcula la longitud del cordel que sujeta la caja.



3. Se tienen cuatro triángulos iguales, como los que aparecen a continuación. Dibuja todas las figuras que pueden formarse al juntar los cuatro triángulos, bajo la condición de que al juntarse dos triángulos tengan un lado en común. ¿Cuáles son sus áreas? ¿Cuáles sus perímetros?



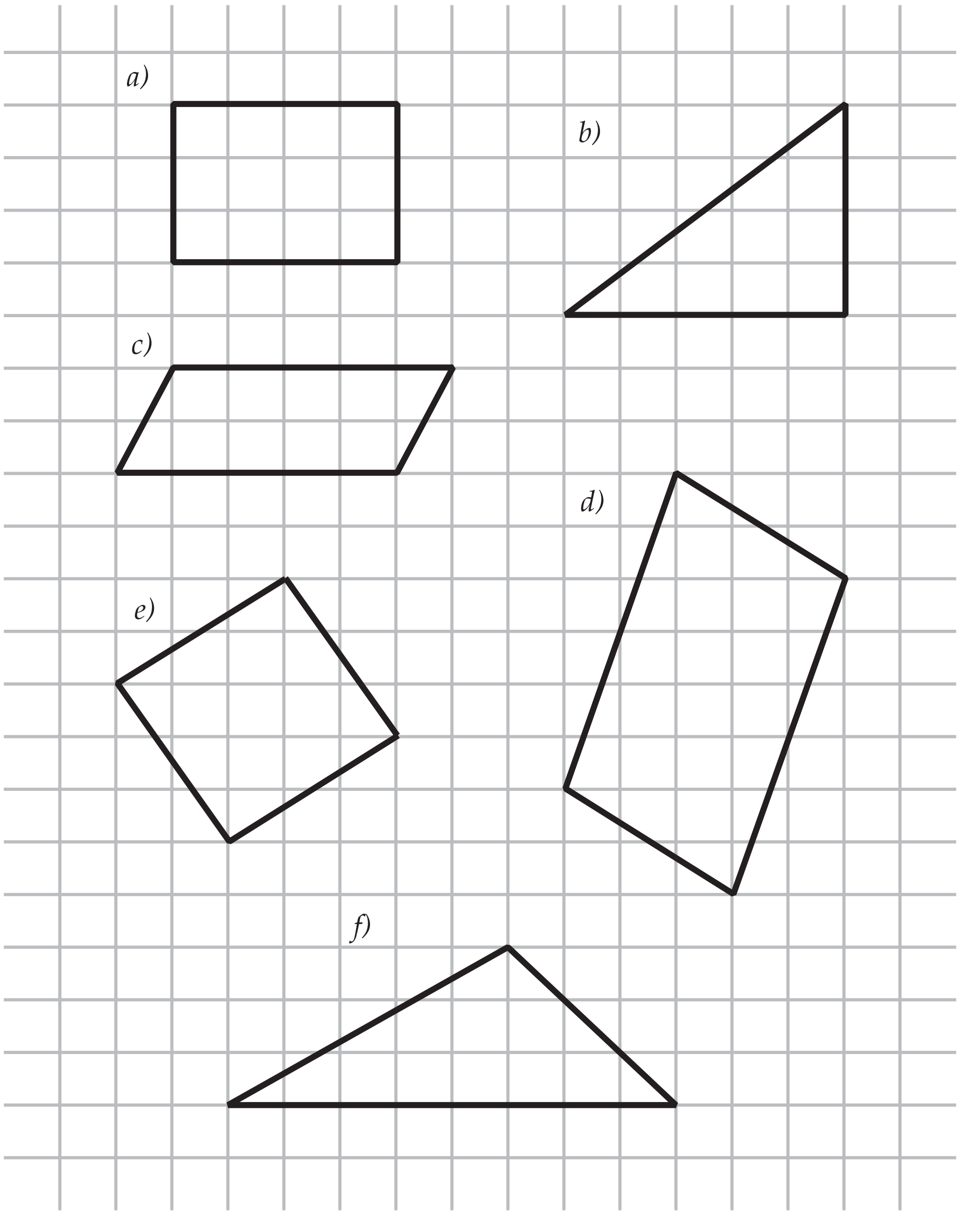
4. Se va a cubrir de mosaico el piso de una pieza rectangular cuyas medidas son 3.75 m × 4.50 m y tiene dos puertas de 85 cm de ancho. Si el colocador cobra $25 por metro cuadrado de piso y $15 por metro lineal de zoclo, ¿cuánto costará la mano de obra?

5. Se dispone de 52 postes para bardar un terreno que mide 25 m × 40 m. ¿A qué distancia deben colocarse si queremos que todos queden a la misma distancia? ¿Y si uno de los frentes de 25 m no se va a bardar?

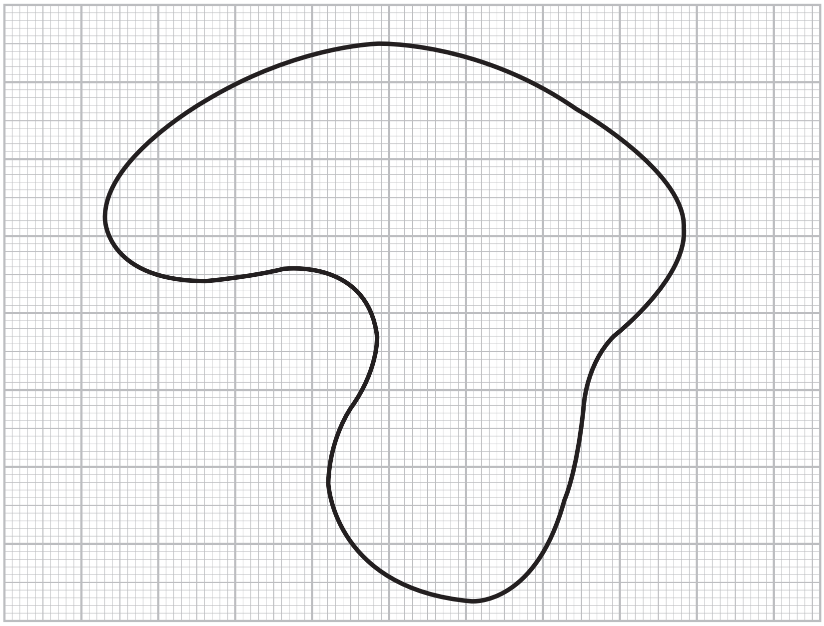
Una actividad sugerida en el programa consiste en calcular el área de figuras regulares e irregulares dibujadas sobre papel cuadriculado o milimétrico:

Por ejemplo

1. Calcula el área de las siguientes figuras suponiendo que cada cuadrito representa 1 cm^2.

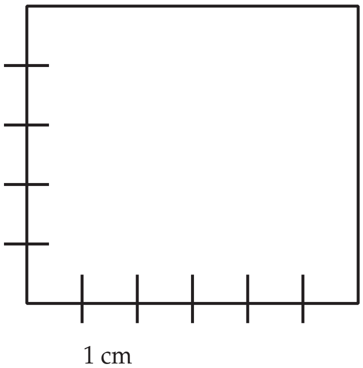


2. Encuentra el área encerrada por la curva.

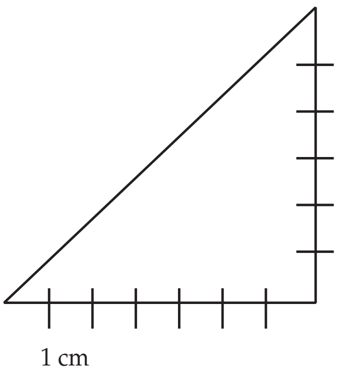


3. Calcular el área de las siguientes figuras u otros ejercicios similares.

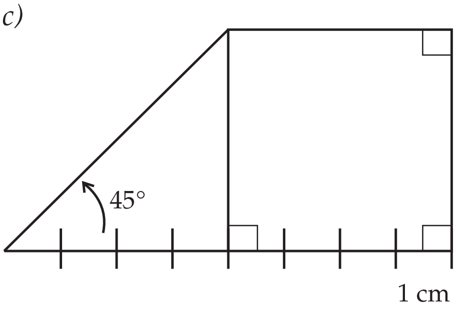
a)



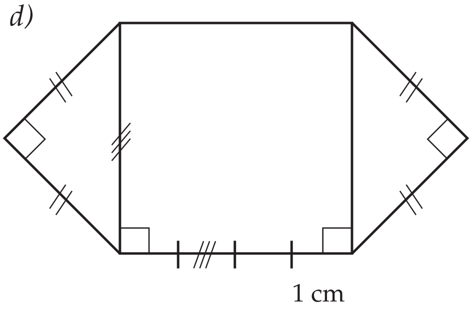
b)



c)



d)



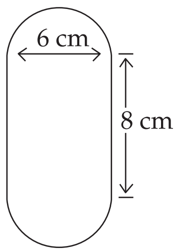
En el primer grado se establecerán las fórmulas para calcular el área de cuadrados, rectángulos y triángulos rectángulos. Se recomienda el uso de una tabla de fórmulas para calcular el área de otras figuras comunes, incluido el círculo. Este tipo de tablas preparan a los alumnos para acceder al álgebra y son de uso cotidiano en las matemáticas.

Como se dijo en párrafos anteriores, no es recomendable limitar el cálculo de áreas a ejercicios planteados únicamente sobre papel. Además, es necesario diseñar situaciones de medición práctica, donde se haga uso real de los instrumentos de medida y las fórmulas se utilicen para resolver problemas. Tampoco es conveniente que todos los ejercicios se resuelvan aplicando una sola fórmula a la vez, pues debe haber problemas donde se combine el uso de varias fórmulas y se practiquen las ideas de descomposición y equivalencia de figuras.

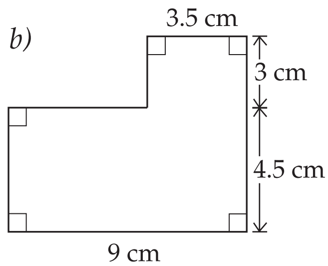
Conviene proponer desde problemas sencillos como los siguientes.

1. Calcula el área de las figuras que aparecen en seguida:

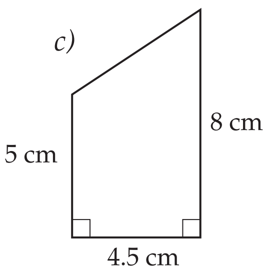
a)



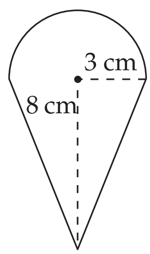
b)



c)

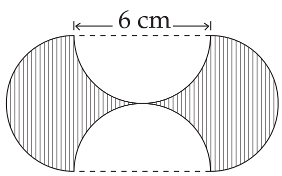


d)

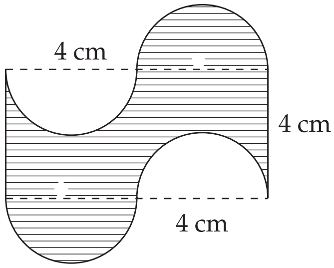


2. Calcula el área de las siguientes figuras sombreadas:

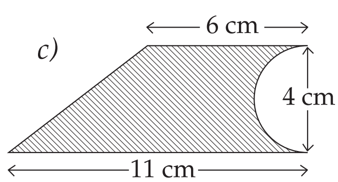
a)



b)



c)

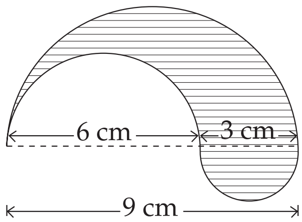


Y continuar hasta problemas más complicados.

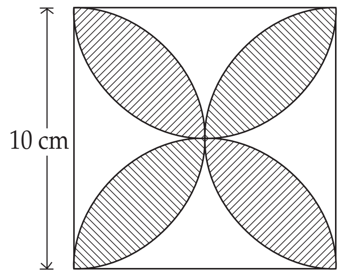
Por ejemplo

1. ¿Cuál es el área de la parte sombreada en las siguientes figuras?

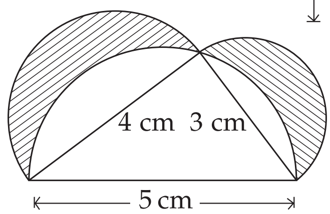
a)



b)



c)

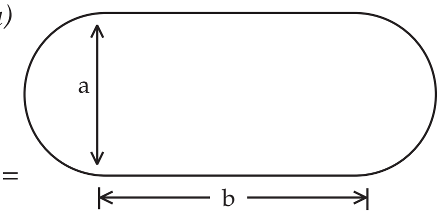


En el segundo grado de educación secundaria se deducirán las fórmulas para calcular el área de figuras rectilíneas, utilizando las nociones de partición y equivalencia de áreas. Esto dará al profesor la oportunidad de verificar si sus alumnos han comprendido la noción de área y sus propiedades y, si lo considera necesario, de insistir en situaciones de cálculo de áreas.

En este momento los alumnos comprenden mejor y manejan con más soltura el álgebra, por lo que podrá pedírseles que establezcan las fórmulas para calcular el área de algunas figuras compuestas.

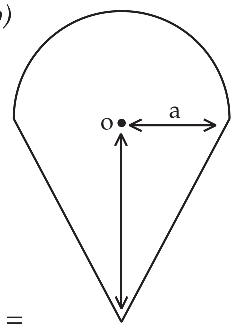
2. Establece una fórmula para calcular el área de cada una de las figuras siguientes:

a)



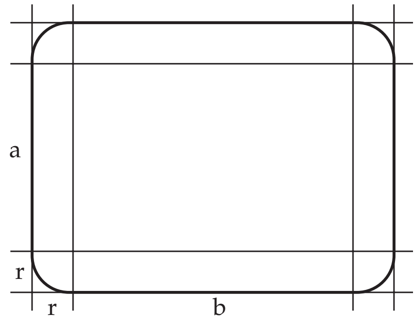
A =

b)



A =

c)



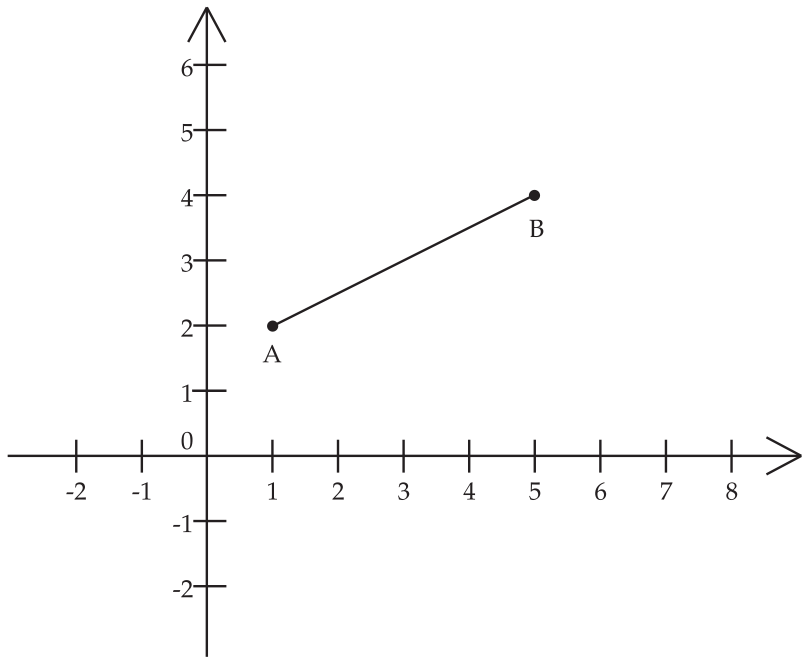
A =

Pitágoras, semejanza y el cálculo geométrico

Existen muchísimas aplicaciones de los teoremas de Pitágoras y de semejanza al cálculo geométrico, entre las que destacan las aplicaciones del teorema de Pitágoras para obtener longitudes y distancias, y las de la semejanza al cálculo de distancias inaccesibles. A continuación se dan algunos ejemplos de problemas que el profesor podrá utilizar en clase.

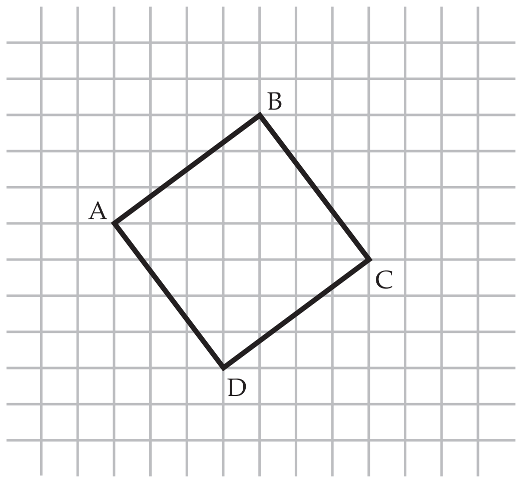
Aplicaciones de Pitágoras

1. ¿Cuál es la longitud del segmento AB?

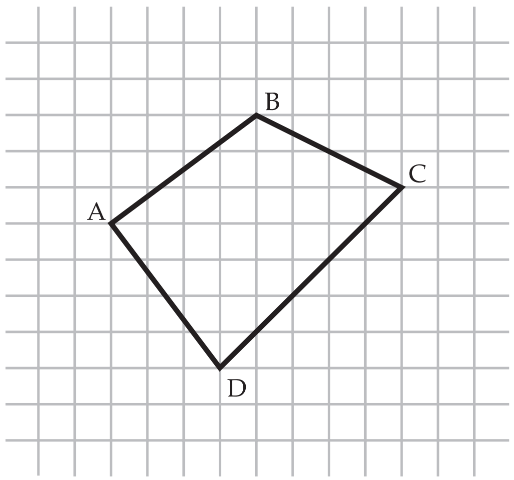


2. ¿Cuál es el perímetro de las siguientes figuras?

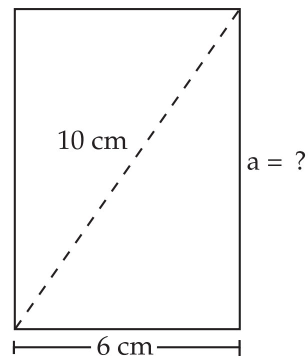
a)



b)



3. ¿Cuánto mide la altura del rectángulo?

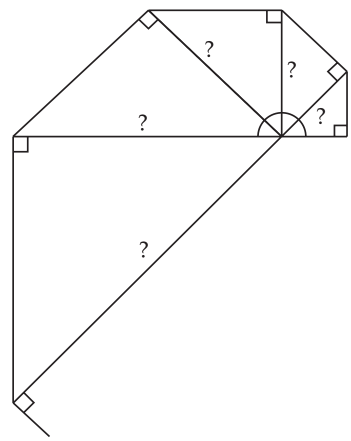


4. Instrucciones para encontrar el tesoro. A partir del árbol caminar:

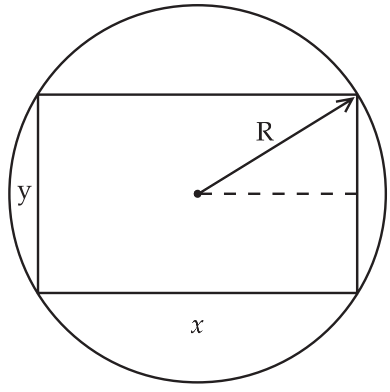
- 35 pasos hacia el este
- 30 pasos hacia el norte
- 15 pasos hacia el oeste
- 10 pasos hacia el norte
- 60 pasos hacia el este
- finalmente, 20 pasos hacia el norte

¿A cuántos pasos del árbol, en línea recta, está el tesoro?

5. Y así sucesivamente.

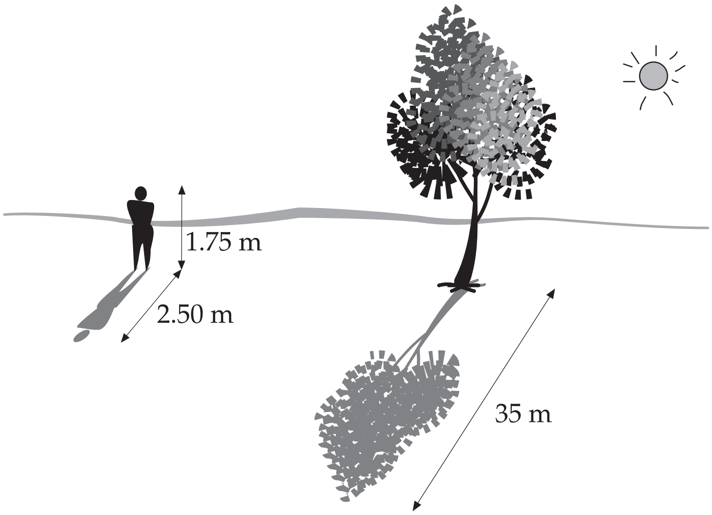


6. Expresar el área del rectángulo en términos de R y *x*.

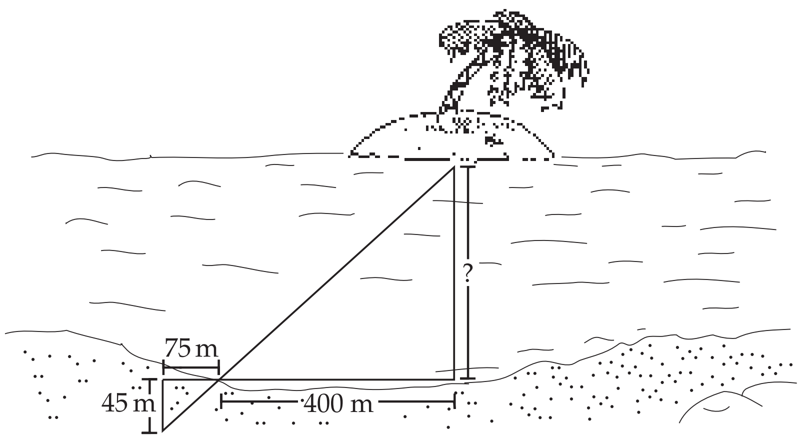


Aplicaciones de la semejanza

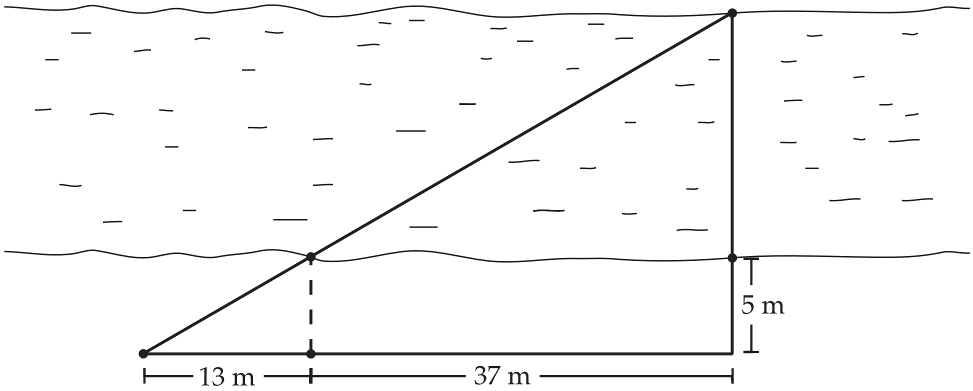
1. ¿Cuál es la altura del árbol?



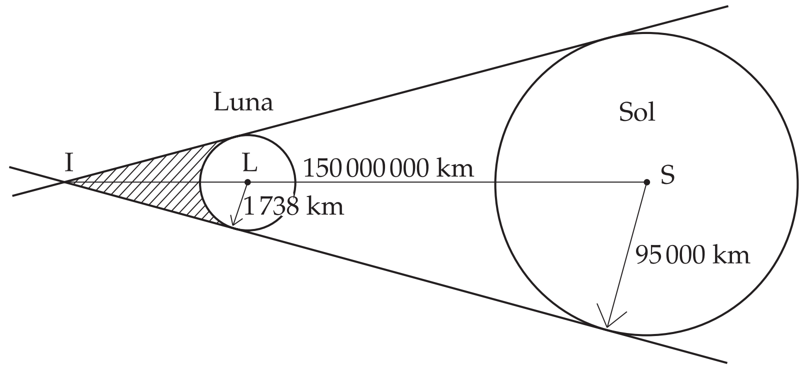
2. ¿A qué distancia se encuentra la isla de la orilla?



3. ¿Cuál es la anchura del río?



4. Calcular la longitud del cono de sombra de la luna (distancia LI).

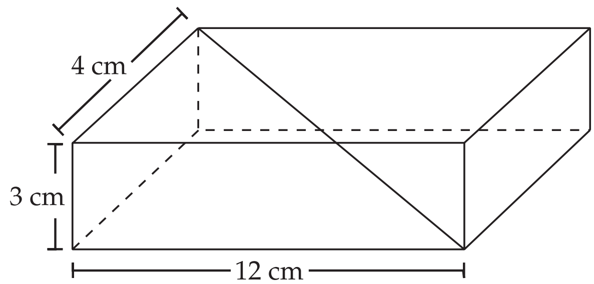


Aplicaciones al estudio de los sólidos

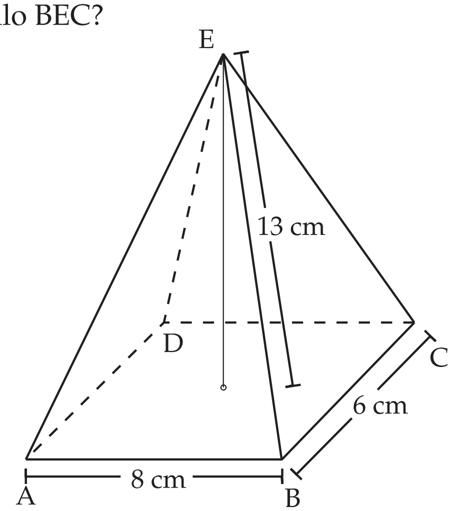
El estudio de los sólidos y cuerpos geométricos también ofrece numerosas oportunidades para aplicar los teoremas de semejanza y de Pitágoras.

Por ejemplo

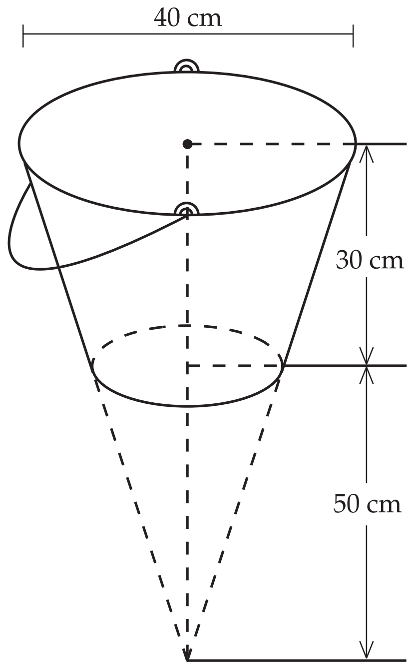
1. ¿Cuánto mide la diagonal?



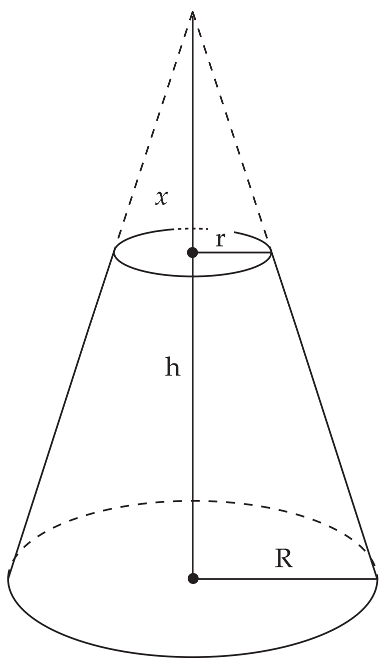
2. Considera la pirámide recta de base rectangular de la izquierda. ¿Cuál es su altura? ¿Cuál es el área del triángulo BEC?



3. ¿Cuál es la capacidad del recipiente?



4. Escribir *x* en función de R, *r* y *h* y después mostrar que el volumen del tronco de cono puede escribirse como se indica:

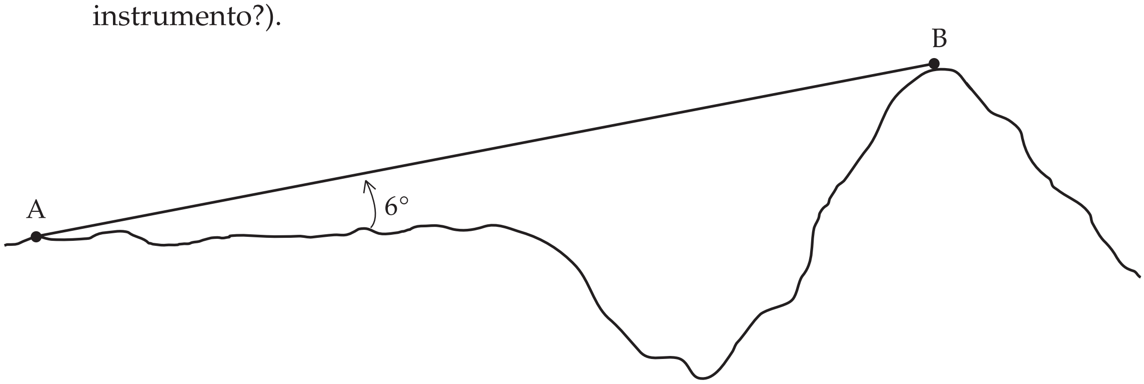


$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

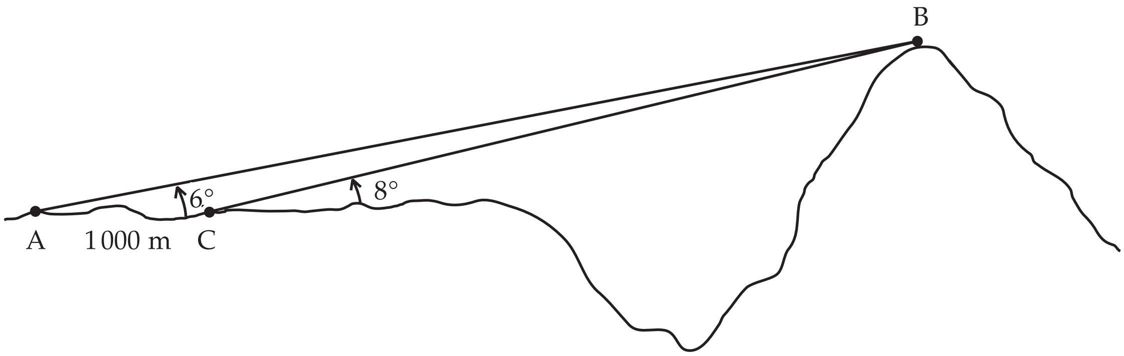
La trigonometría y el cálculo de distancias inaccesibles

Para medir una longitud o una distancia, se toma una unidad, el metro por ejemplo, y se coloca sobre la distancia que quiere medirse para ver cuántas veces cabe. Esto es lo que indica el sentido común, pero hay muchas situaciones donde no puede seguirse este procedimiento. Por ejemplo, de esta forma no puede medirse la distancia de la Tierra a la Luna o al Sol, o el diámetro de la Tierra, o tampoco medir la altura de una montaña o la anchura de un lago. Para medir distancias inaccesibles como las anteriores se utiliza la trigonometría.

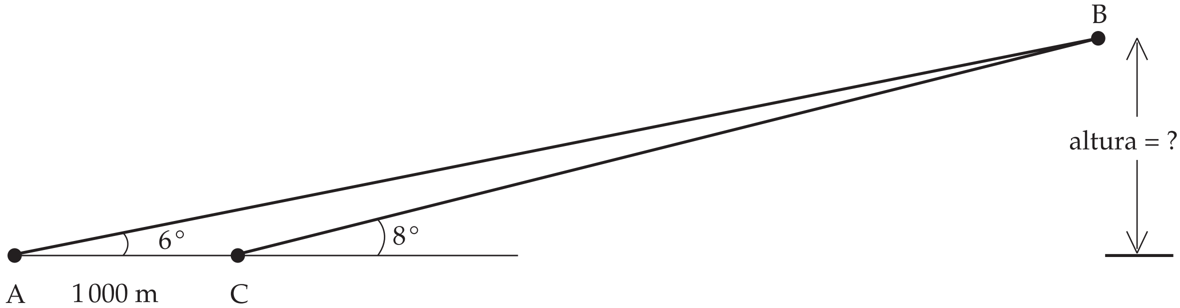
Supongamos, por ejemplo, que estamos situados en el punto A y queremos medir la altura de la montaña B, que resulta inaccesible por la existencia de una barranca. Y si la barranca no existiera tampoco se podría medir directamente la altura, puesto que no puede llegarse al centro de la montaña. Supongamos también que se dispone de un instrumento para medir el ángulo entre la horizontal y la línea que une el punto A con la cúspide de la montaña y que este ángulo mide 6º (¿cómo se construiría este instrumento?).



A continuación caminamos 1 000 m hacia la montaña. Llamamos C al punto donde llegamos y medimos el ángulo formado por la horizontal y la línea que une C con la cúspide de la montaña y encontramos que ahora el ángulo es de 8º. La situación se ilustra en la siguiente figura:



Entonces ya sabemos cuál es el problema por resolver: se necesita obtener la altura del siguiente triángulo del cual se conocen la base y los ángulos en la base.



La situación anterior ilustra cómo se procede en la trigonometría: los problemas se traducen en problemas de triángulos y se resuelven estos triángulos utilizando las relaciones trigonométricas, es decir, las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo.

Resolver un triángulo significa:

- Dados los tres lados, encontrar los ángulos.

- Dados dos lados y el ángulo comprendido, encontrar el tercer lado y los otros dos ángulos.

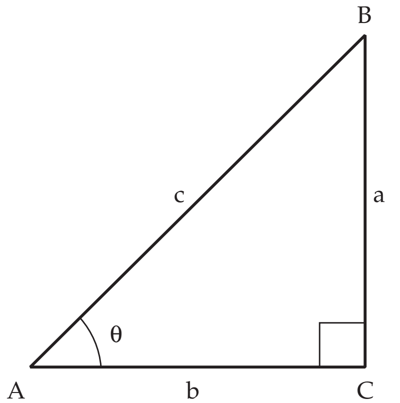
- Dados un lado y los ángulos adyacentes, encontrar los otros dos lados y el ángulo que falta.

Fueron los griegos quienes iniciaron el estudio sistemático de las relaciones entre los ángulos (los arcos) de un círculo y las cuerdas correspondientes. Sin embargo, y como ocurre con frecuencia en las matemáticas, la trigonometría no es creación de un solo individuo o nación, pues resultados sobre las relaciones entre los lados de triángulos semejantes fueron conocidos y utilizados en el antiguo Egipto y en Babilonia. Durante mucho tiempo, el desarrollo de la trigonometría estuvo asociado a la astronomía y no fue una disciplina que tuviera existencia propia, ni siquiera entre los matemáticos árabes, quienes la preferían sobre cualquier otra parte de las matemáticas, excepto quizás el álgebra. En el siglo XV, el matemático y hombre del Renacimiento Johann Müller (1436-1476), mejor conocido por el nombre latino de su lugar de origen *Regiomontanus* (Königsberg, "montaña del rey", en Alemania), publicó dos textos que modificaron la situación anterior. El primero fue un resumen del *Almagesto* de Ptolomeo, el más grande tratado de astronomía de la Antigüedad, escrito durante la segunda centuria de nuestra era. El segundo fue un estudio detallado de los diferentes métodos de resolver triángulos arbitrarios. Estos dos textos, sobre todo el segundo, marcan el nacimiento de la trigonometría como una parte de las matemáticas independiente de la astronomía.

Desde entonces la importancia de la trigonometría no ha decrecido y sus aplicaciones se han extendido más allá de la astronomía; la generalización de las razones trigonométricas a las funciones circulares permite construir modelos para una multitud de fenómenos periódicos que se estudian en la física, la biología y otras disciplinas. Aunque en la educación secundaria sólo se presentan algunos de los temas iniciales de la trigonometría, su estudio es rico en situaciones que pueden interesar a los alumnos.

También los prepara para el estudio de temas más avanzados, como son los números complejos, los vectores, las coordenadas polares, etcétera.

El programa de Matemáticas para el tercer grado de la educación secundaria contempla una introducción a la trigonometría, una vez que los alumnos conocen y han resuelto diversas aplicaciones de los teoremas de Pitágoras y de semejanza. Se inicia con la definición y estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente para ángulos comprendidos entre 0º y 90º.

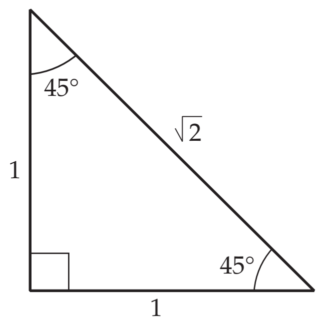


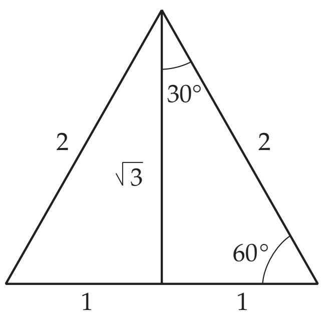
$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

Se recomienda que los alumnos utilicen las definiciones anteriores y las propiedades de los triángulos equilátero y rectángulo isósceles para calcular las razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º y 60º.





ÁNGULO θ / FUNCIÓN	30º	45º	60º
Sen θ			
Cos θ			
Tan θ			

Para los otros ángulos entre 0° y 90º, así como para calcular el valor de un ángulo cuando se conocen su seno, coseno o tangente, se podrán utilizar las tablas trigonométricas o una calculadora.

Una actividad que los alumnos deberán tener la oportunidad de practicar consiste en calcular el valor de las razones trigonométricas conociendo el valor de una de ellas.

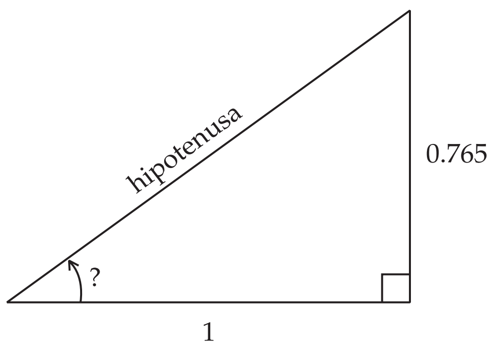
Por ejemplo

1. Encontrar el valor de sen θ y cos θ sabiendo que tan θ = 0.765.

Recordemos que:

$$\text{tangente } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = 0.765 = \frac{0.765}{1}$$

Ahora, el “truco” para resolver el problema consiste en dibujar un triángulo cuyos catetos opuesto y adyacente midan 0.765 y 1, respectivamente. Luego se calcula el valor de la hipotenusa utilizando el teorema de Pitágoras:



$$\text{hipotenusa} = \sqrt{1^2 + 0.765^2}$$

$$= \sqrt{1.585225} = 1.259\ldots$$

Utilizando este triángulo se obtienen los valores de las otras razones trigonométricas:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{0.765}{1.259} = 0.607\ldots$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{1.259} = 0.794\ldots$$

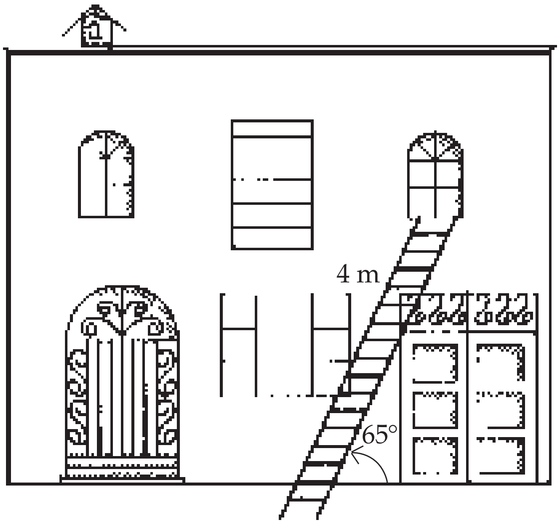
Para obtener el valor de θ se utiliza una de las funciones sen^{-1}, $\cos^{-1}$ o $\tan^{-1}$ en la calculadora o se busca en tablas :

$$\theta = 37° \ 25'$$

Los alumnos deberán tener numerosas oportunidades de utilizar las razones trigonométricas para plantear y resolver problemas que involucren triángulos rectángulos.

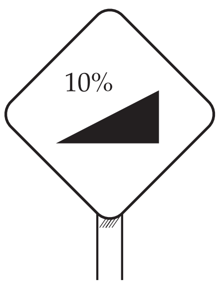
Por ejemplo

1. Una escalera de 4 m de largo llega hasta el pretil de una ventana cuando el ángulo formado por la escalera y el suelo es de 65°. ¿A qué altura se encuentra la ventana? ¿En qué ángulo debe colocarse la escalera para que quede 50 cm por debajo de la ventana?

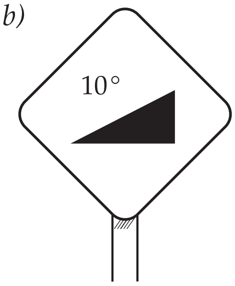


2. Se dice que una subida tiene una pendiente de 10%. Si se eleva 10 m por cada 100 m horizontales recorridos, ¿cuál de las rutas siguientes tiene la mayor pendiente?

a)

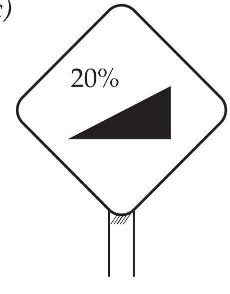


b)

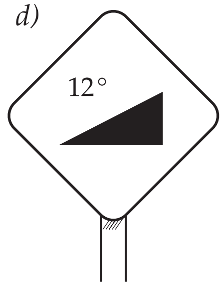


¿Y de éstas?

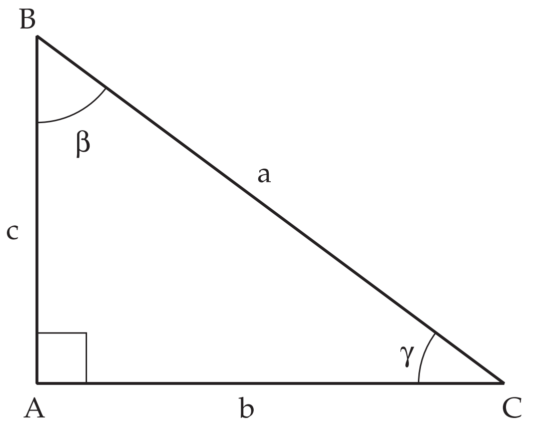
c)



d)



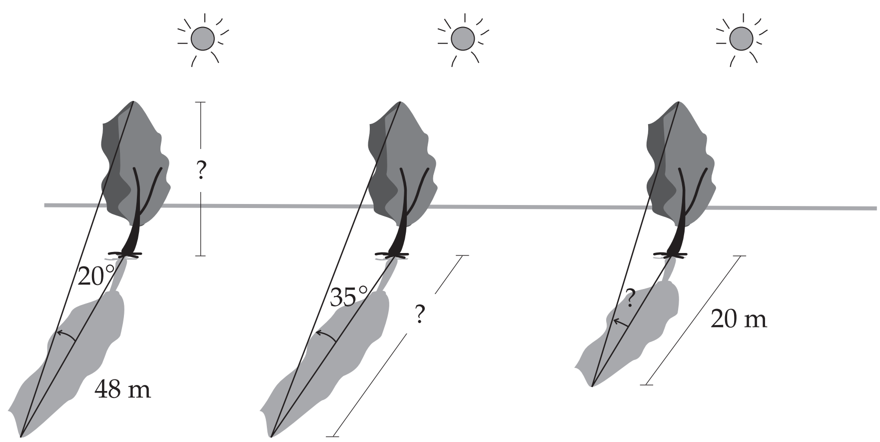
3. Dado un triángulo rectángulo como el siguiente:



Completa la tabla:

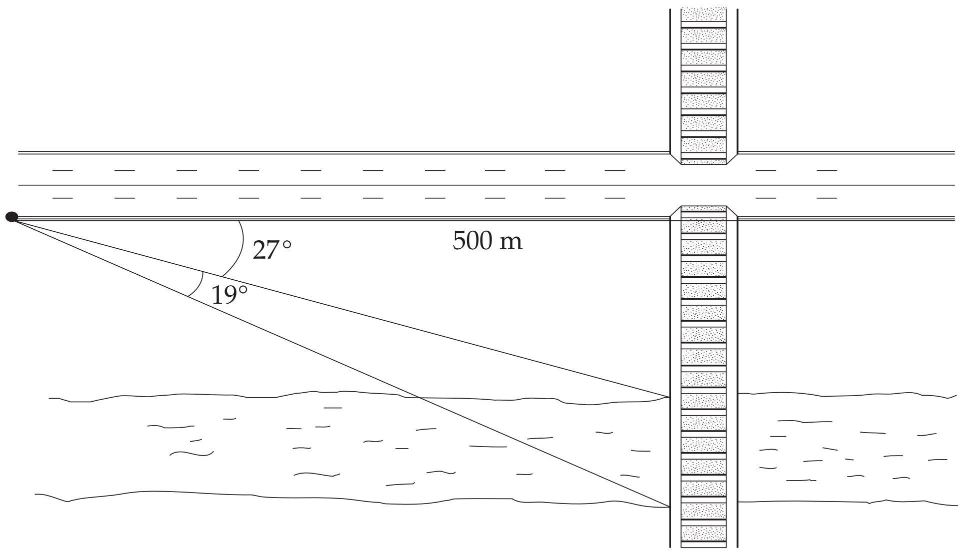
Caso	a	b	c	β	γ	senβ	cosβ	tanβ	senγ	cosγ	tanγ
1	7	5									
2	10			35º							
3		15		40º							
4		4	5								

4. Un árbol proyecta una sombra de 48 m cuando el sol se encuentra a una altura de 20º sobre el horizonte. ¿Cuál es la altura del árbol? ¿Cuál será la longitud de la sombra cuando el sol se encuentre a una altura de 35º sobre el horizonte? ¿Cuál será la altura del sol sobre el horizonte cuando el árbol proyecte una sombra de 20 m?

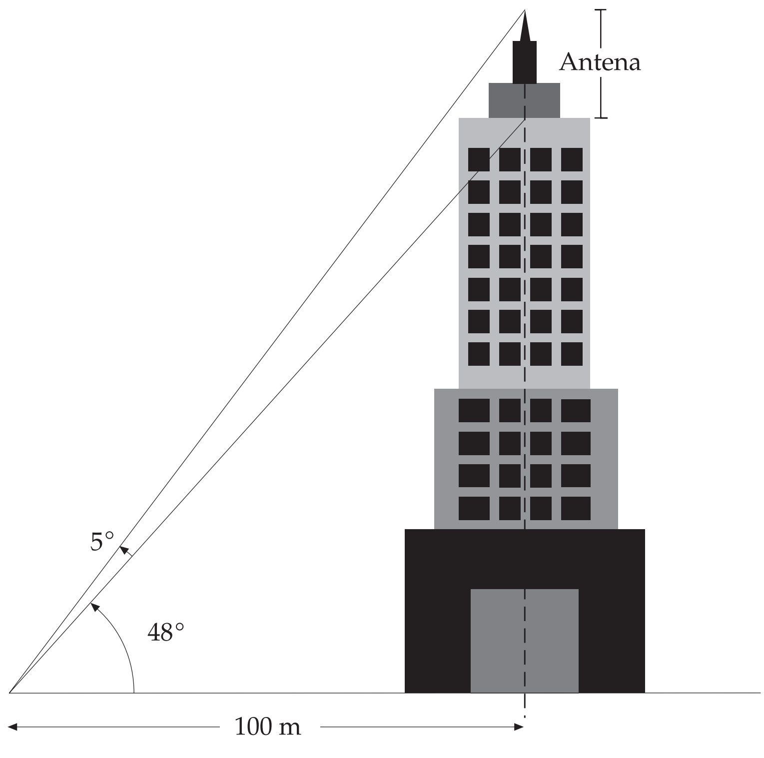


5. La Torre Latinoamericana, en la Ciudad de México, tiene una altura de aproximadamente 180 m, incluida la antena. ¿A qué distancia debo colocarme de ella para verla bajo un ángulo de 15º?

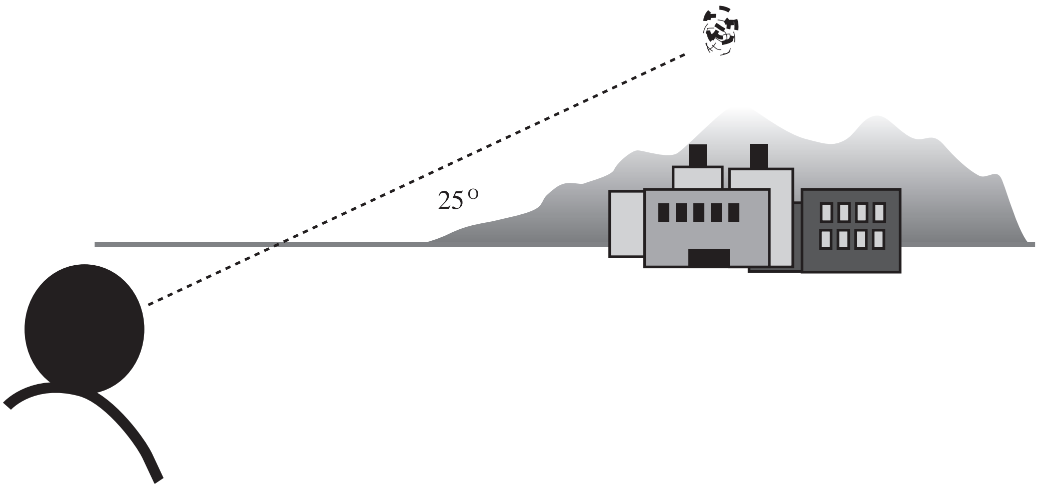
6. Una vía de ferrocarril atraviesa perpendicularmente una carretera recta y más adelante cruza un puente sobre un río. Una persona que se encuentra sobre la carretera, a 500 m del cruce con la vía, observa una situación como la indicada en el dibujo. ¿Cuál es la longitud del puente?



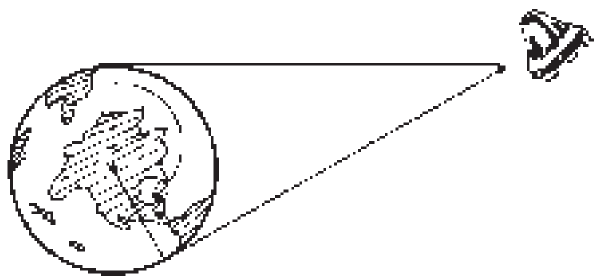
7. ¿Cuáles son las alturas del edificio y de la antena?

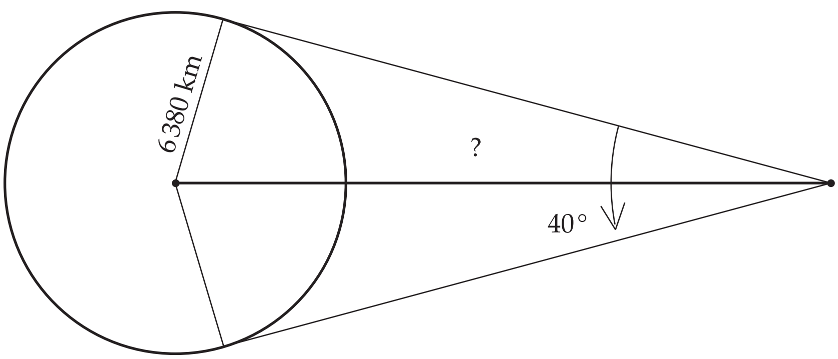


8. Alguien lanza un cohete y lo vemos explotar; medio segundo después escuchamos el estallido. Si cuando vimos explotar el cohete nuestra mirada hacía un ángulo de 25º con la horizontal, ¿a qué altura explotó el cohete? (**Nota**: la velocidad del sonido es de aproximadamente 340 m/seg y podemos despreciar el tiempo que tardó la luz en llegar a nosotros, ya que viaja a 300 000 km/seg aproximadamente.)



9. Un astronauta ve desde su nave que la Tierra abarca un ángulo de 40º. ¿A qué altura se encuentra sobre la superficie de la Tierra? (**Nota**: el radio de la Tierra es de aproximadamente 6 380 km.)



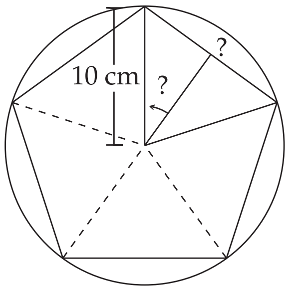


La trigonometría y el estudio de los polígonos regulares

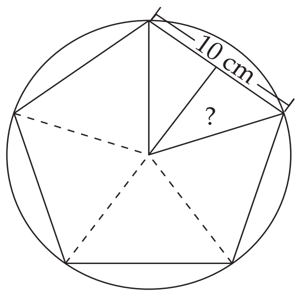
El estudio de los polígonos regulares también da lugar a problemas interesantes de trigonometría.

Por ejemplo

1. ¿Cuál es el perímetro y el área de un pentágono inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio?

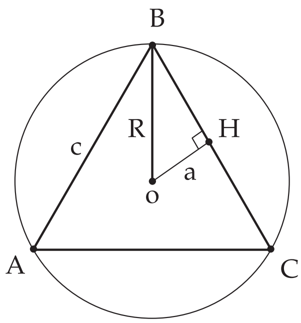


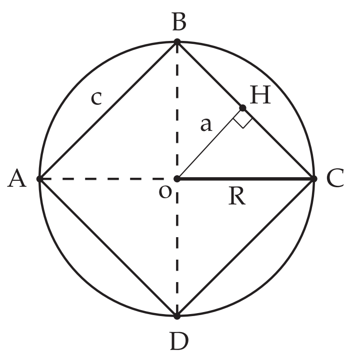
2. Calcular la apotema y el área de un pentágono (o hexágono, o heptágono,...) cuyos lados miden 10 cm.

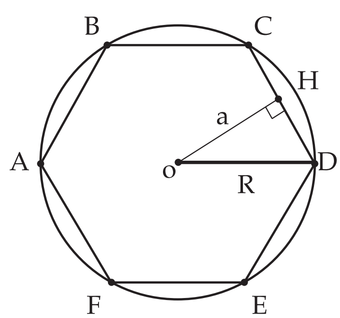


3. Un polígono regular de 12 lados tiene un área de 24 unidades cuadradas. ¿Cuánto miden sus lados? ¿Y los radios de los círculos inscrito y circunscrito?

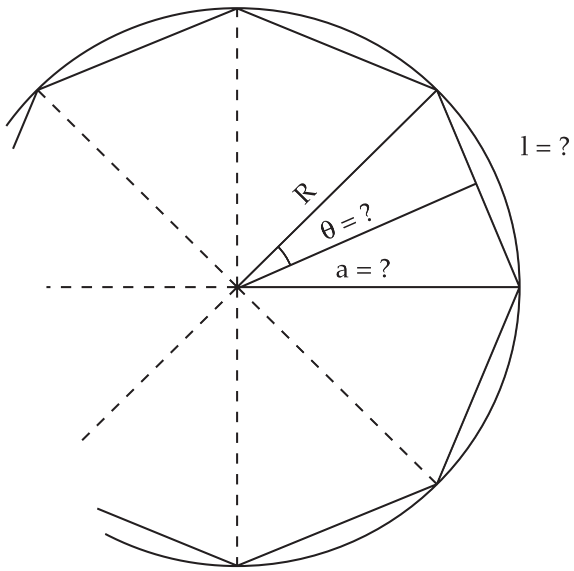
4. Utilizando los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 30º, 45º y 60º, expresar en función de R el lado, la apotema y el área de los siguientes polígonos inscritos en un círculo.







5. ¿Cuáles serían las fórmulas para calcular el lado, la apotema, el perímetro y el área de un polígono de *n* lados inscrito en una circunferencia de radio R?



$l(n) = 2R\,\text{sen}\,\theta$

$a(n) = R\cos\theta$

$P(n) = 2nR\,\text{sen}\,\theta$

$A(n) = nR^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

donde $\theta = 360^{o}/2n$

El propósito no es que los alumnos memoricen las fórmulas anteriores pero es interesante que las utilicen para resolver ejemplos como el siguiente.

6. En la tabla que viene a continuación están dados el lado, la apotema, el perímetro y el área de los polígonos regulares de 3 (triángulo equilátero) y 6 (hexágono regular) lados inscritos en una circunferencia de radio 10 cm. Completa la tabla para los polígonos regulares de 12, 24 y 48 lados. ¿Qué descubres en la tabla? Coméntalo con tu profesor y compañeros.

NÚM. DE LADOS	LADO	APOTEMA	PERÍMETRO	ÁREA
3	17.32	5.00	51.96	129.90
6	10.00	8.59	60.00	258.58
12				
24				
48				

Los resultados de la tabla están redondeados a la segunda cifra decimal.

Iniciación al razonamiento deductivo

Aunque el razonamiento interviene en toda actividad humana, en ninguna parte es tan fundamental como en las matemáticas. Avanzar conjeturas, ilustrar su validez por medio de ejemplos y tratar de probarlas en general mediante un razonamiento lógico, o de refutarlas dando un contraejemplo, constituye la esencia misma de esta disciplina. Si se quiere que los alumnos utilicen las matemáticas para resolver problemas, es importante que aprendan a razonar, es decir, a producir conjeturas, a construir y comunicar argumentos y a examinarlos para reconocer si son válidos o no. En el caso de la geometría, razonar también quiere decir saber transcribir en figuras un problema; esto es, construir un dibujo para comprender mejor el significado de ciertas afirmaciones, o para explorar los diferentes casos que pueden presentarse al resolverlo.

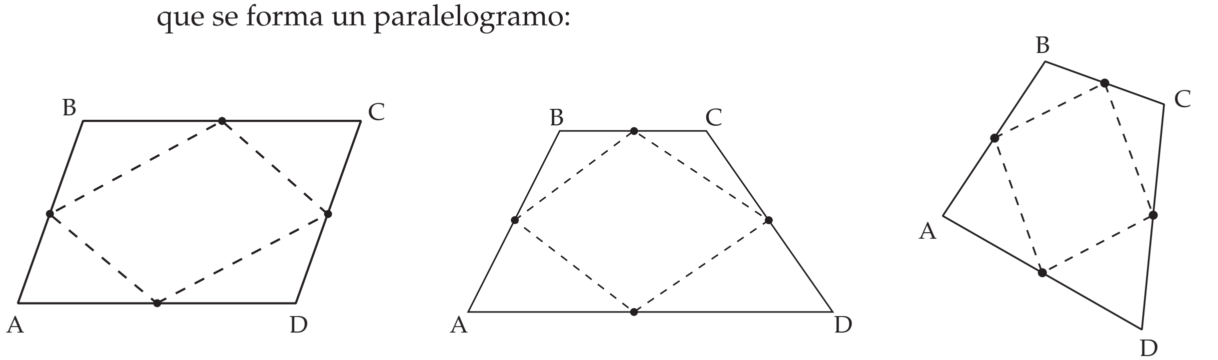
Las conjeturas surgen de la manipulación de objetos concretos o de la observación de lo que ocurre en varios casos particulares, es decir, de un razonamiento inductivo. Para validar estas conjeturas los alumnos necesitan aprender a razonar lógica, deductivamente. Este es un objetivo que requiere de una larga preparación para alcanzarse, pues no es fácil construir argumentos válidos o evaluar los argumentos de los otros. Aun estudiantes de grados superiores tienen dificultades para proporcionar o seguir un razonamiento deductivo, sobre todo si es abstracto y formal y no se apoya en situaciones concretas, conocidas por ellos y cercanas a su experiencia.

La geometría representa, desde hace mucho tiempo, el primer contacto de los estudiantes con el pensamiento deductivo y la demostración. No debe confundirse, sin embargo, la iniciación gradual al razonamiento deductivo propuesta por los programas con una presentación axiomática de la geometría. La idea es que en situaciones escogidas por el profesor, los alumnos produzcan conjeturas a partir de la exploración de algunos casos particulares y que aprendan gradualmente a rechazarlas construyendo un contraejemplo, o las prueben mediante un razonamiento deductivo.

Por ejemplo

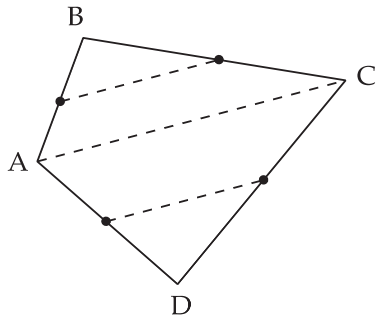
1. Explorar lo que ocurre cuando se unen los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero, ¿qué figuras obtiene?

Los alumnos podrán darse cuenta, a partir del análisis de varios casos particulares, que se forma un paralelogramo:

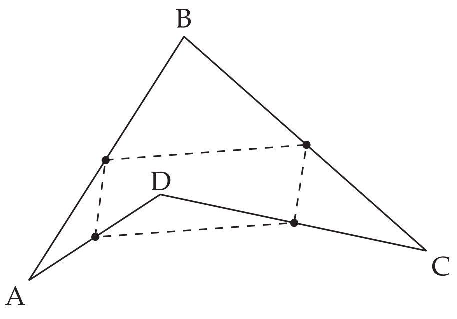


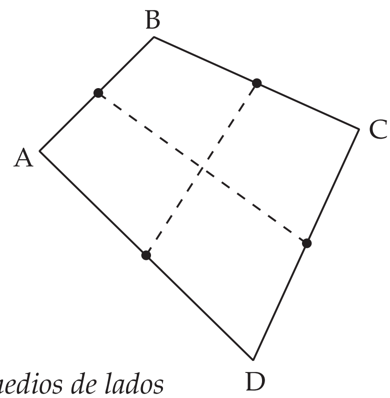
En una segunda fase, el profesor podrá orientarlos a que proporcionen un argumento deductivo para demostrar que se trata efectivamente de un paralelogramo.

Es probable que al principio, cuando los alumnos todavía no están acostumbrados a imaginar trazos auxiliares y tienen dificultades para generar una demostración, aun en casos muy sencillos, el profesor tenga que dar algunas sugerencias, por ejemplo, ¿creen que nos ayudaría trazar la diagonal que une dos vértices del cuadrilátero?



Una vez que se tiene la demostración —y si los alumnos no lo han tomado en cuenta— se les podrá preguntar si la misma sirve también para el caso de un cuadrilátero como el siguiente o, si se quiere plantear otro problema relacionado con el anterior, pedirles explorar y demostrar qué ocurre cuando se unen los puntos medios de lados opuestos de un cuadrilátero.





Los segmentos que unen los puntos medios de lados opuestos de un cuadrilátero se bisectan (¿por qué?)

El aprendizaje de la geometría será más interesante para los alumnos si no se intenta probar desde el principio resultados evidentes, por ejemplo, que *en un triángulo a lado mayor se opone ángulo mayor*. Las actividades propuestas deberán hacer sentir la satisfacción que acompaña al descubrimiento de hechos hasta entonces desconocidos y de su relación con lo que uno ya sabía. Más adelante la atención del alumno se desplazará poco a poco de los resultados a sus demostraciones y comenzará a comprender por qué ciertos hechos necesitan demostrarse, aunque parezcan muy sencillos y evidentes.

También es importante no demostrar teoremas o resultados aislados, sino proponer actividades que permitan a los alumnos utilizar el razonamiento deductivo para establecer cadenas de teoremas, al principio pequeñas y extraídas de una misma situación, después un poco más largas y que vinculen situaciones diferentes. Los alumnos deberán aprender en forma paulatina a distinguir lo que se ha probado de aquello que se ha aceptado sin demostración y a redactar sus demostraciones.

En resumen, resolver un problema de geometría o hacer una demostración pasa por varias fases:

a) La comprensión del problema

Se trata de distinguir los datos de las conclusiones, de transcribir en figuras el problema. No debe confundirse con la comprensión del enunciado, pues muchas veces un problema sólo se comprende después de haber examinado varios casos particulares.

b) La fase de investigación y búsqueda de la solución

Se trata de organizar el examen de casos particulares con el fin de producir las primeras conjeturas y buscar los contraejemplos que eventualmente puedan refutarlas; de reconocer las figuras clave e introducir los trazos auxiliares que permitirán reducir una situación nueva a situaciones conocidas de antemano, o que servirán para apoyar nuestras argumentaciones.

c) La redacción de la solución

Se trata de presentar de manera matemáticamente correcta los resultados obtenidos durante la fase de investigación y búsqueda, distinguiendo con cuidado los resultados que se prueban de aquellos que se tomaron como ciertos o que ya habían sido probados antes.

Cada una de las fases anteriores requiere de técnicas de trabajo diferentes por parte de los alumnos y de una larga preparación pedagógica, a la cual el profesor deberá dedicar sus esfuerzos mucho antes de enfrentarlos con una demostración. Como se dijo en páginas anteriores, desde el principio del estudio de la geometría deberán proponerse actividades para que los alumnos exploren y se acostumbren a las propiedades clave de las figuras y configuraciones geométricas y las utilicen para resolver problemas. Por otro lado, también es necesario que haya actividades que les permitan y ayuden a organizar y expresar su pensamiento por escrito. Deberá tenerse en cuenta que, sin la fase de redacción, la actividad de resolver problemas queda incompleta y sus beneficios son limitados.*

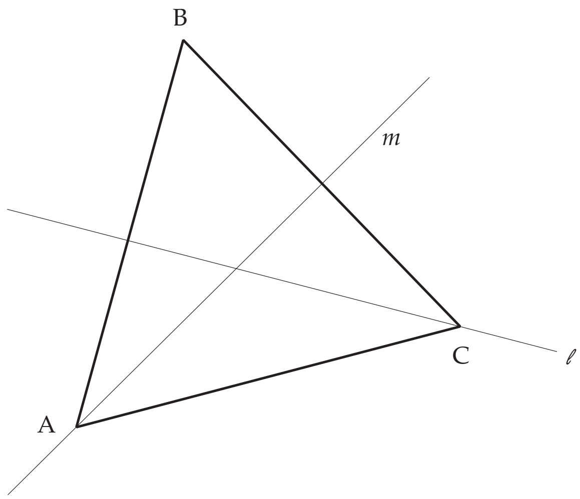
* Adaptado de IREM, *Mathematiques 3e*, Estrasburgo, Francia, ISTRA.

A continuación aparece una lista de situaciones que podrán servir para introducir a los estudiantes al razonamiento deductivo. Ni la lista, ni las explicaciones que la acompañan intentan ser exhaustivas. Seguramente el profesor conoce otras situaciones que podrá utilizar en sus clases.

Número de ejes de simetría de un polígono

1. ¿Puede un triángulo tener exactamente dos ejes de simetría?

Para responder a la pregunta anterior, dibujemos el triángulo ABC y supongamos que tiene dos ejes de simetría, indicados por las rectas l y m en la figura.



Como ℓ es un eje de simetría del triángulo, se tiene:

$$AC = BC$$

Y como m también es un eje de simetría del triángulo, se tiene además que:

$$AC = AB$$

De las igualdades anteriores se deduce:

$$AB = BC = AC$$

Esto es, los tres lados del triángulo son iguales y, por lo tanto, se trata de un triángulo equilátero. Ahora bien, un triángulo equilátero siempre tiene tres ejes de simetría, de donde se concluye que el triángulo tiene un tercer eje de simetría y, por tanto, no puede tener exactamente dos.

2. Se sabe que un triángulo puede tener 0, 1 o 3 ejes de simetría, pero no puede tener exactamente dos ejes de simetría. Investiga los casos que pueden presentarse para un cuadrilátero, un pentágono, un hexágono, etcétera.

Problemas de aritmética

Los siguientes problemas, u otros más sencillos o ligeramente más complicados, podrán ser útiles para practicar el razonamiento deductivo en un contexto distinto al de la geometría. Al resolver cada problema, conviene que los alumnos investiguen algunos casos particulares y no proporcionarles las sugerencias de solución desde el principio, sino esperar un poco hasta que hayan hecho sus propios intentos para resolverlo. Salvo indicación contraria, los números que intervienen en cada problema son enteros naturales.

1. Todo número impar es la suma de dos enteros consecutivos.

2. La diferencia entre dos cuadrados perfectos consecutivos es siempre un número impar.

3. Mostrar que $1/2 < 2/3 < 3/4 < 4/5$ ... y así sucesivamente.

4. El cuadrado de todo número impar es impar y, recíprocamente, si el cuadrado de un número es impar, entonces el número es impar.

5. Probar que la suma de tres enteros consecutivos es múltiplo de 3. Investigar lo que ocurre en el caso de 4, 5, 6, ... enteros consecutivos. ¿En qué casos la suma de k enteros consecutivos es múltiplo de k?

6. Entre k números consecutivos, siempre hay uno divisible entre k (*Sugerencia:* dados k números consecutivos: $x + 1, x + 2, ..., x + k$, investiga los residuos que se obtienen al dividir cada número entre k).

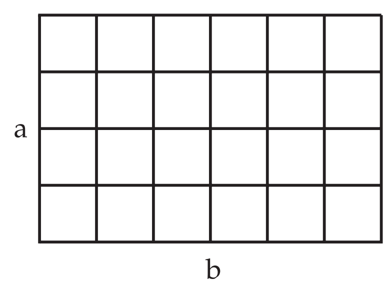
7. ¿Será cierto?

$$\begin{array}{rcrcl}
1 & = & 1 & = & 1^3 \\
3 + 5 & = & 8 & = & 2^3 \\
7 + 9 + 11 & = & 27 & = & 3^3 \\
13 + 15 + 17 + 19 & = & 64 & = & 4^3
\end{array}$$

Continuar

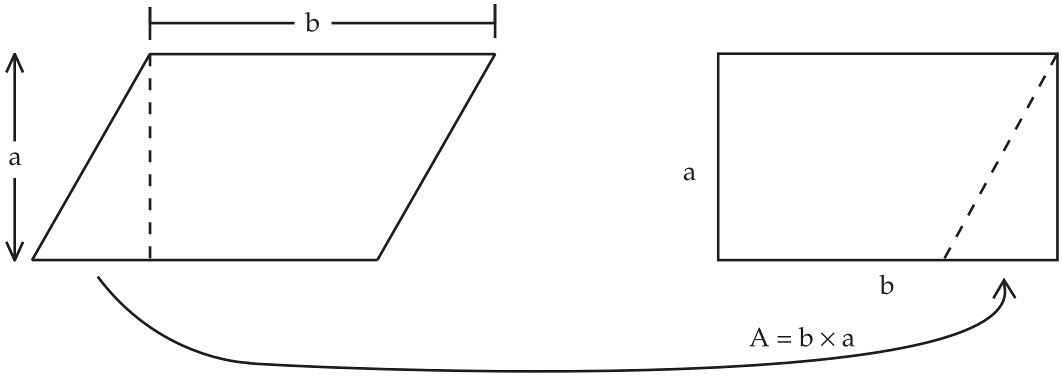
Fórmulas para el cálculo de áreas de las figuras usuales

Tomando como punto de partida la fórmula para calcular el área del rectángulo, pueden deducirse las fórmulas para calcular el área de las otras figuras usuales de lados rectilíneos.



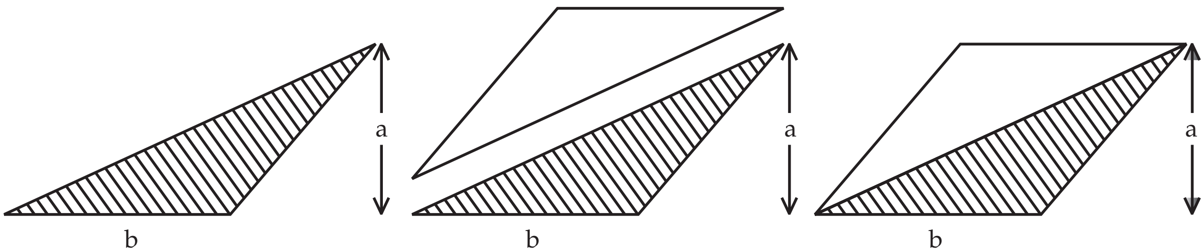
$A = b \times a$

Paralelogramo



Triángulo

Dado un triángulo cualquiera, se toma otro de la misma forma y tamaño y con los dos se forma un paralelogramo. Entonces el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo formado.

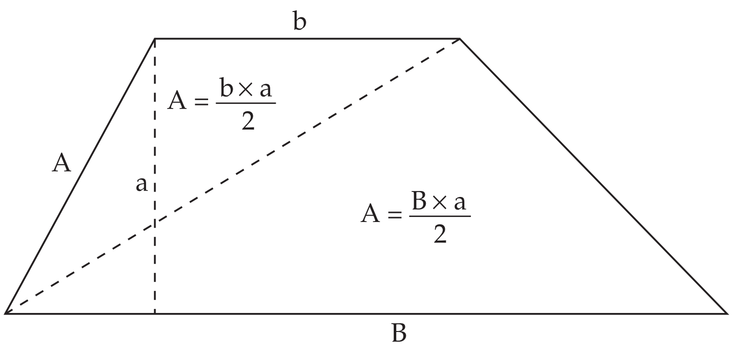


$$\text{Área del paralelogramo} = b \times a$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{b \times a}{2}$$

Trapecio

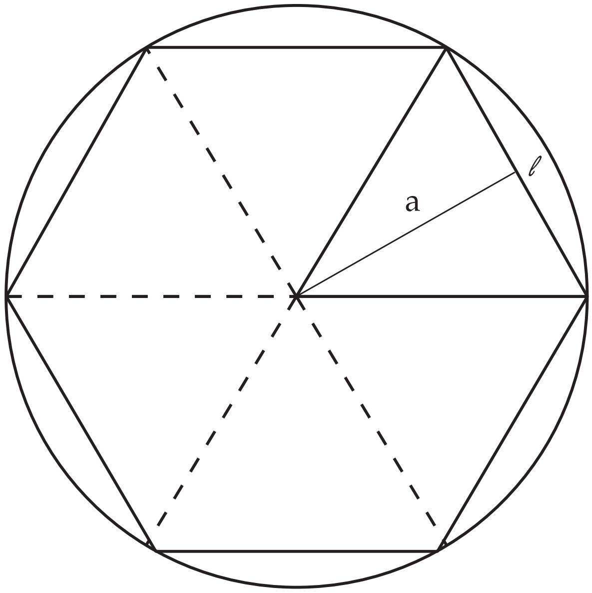
Para encontrar la fórmula correspondiente, basta dividir el trapecio en dos triángulos de diferente base pero misma altura y sumar las áreas de cada uno:



$$\text{Área del trapecio} = \frac{B \times a}{2} + \frac{b \times a}{2} = \frac{B \times a + b \times a}{2} = \frac{(B + b) \times a}{2}$$

Polígonos regulares

Uniendo el centro con cada uno de los vértices, un polígono regular puede dividirse en tantos triángulos iguales como lados tiene. Por ejemplo, el hexágono se divide como se indica en la figura:



$$\text{Área del hexágono} = 6 \times \frac{\ell \times \text{a}}{2}$$

$$= \frac{6 \times \ell \times \text{a}}{2}$$

Como $6 \times \ell$ es igual al perímetro del hexágono, se tiene:

$$\text{Área del hexágono} = \frac{p \times \text{a}}{2}$$

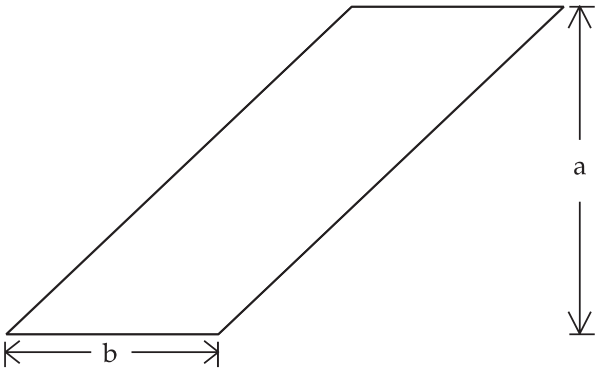
donde p indica el perímetro. Procediendo de la misma manera se demuestra que, en general, el área de un polígono regular se obtiene multiplicando el perímetro por la apotema y dividiendo entre dos.

Observaciones

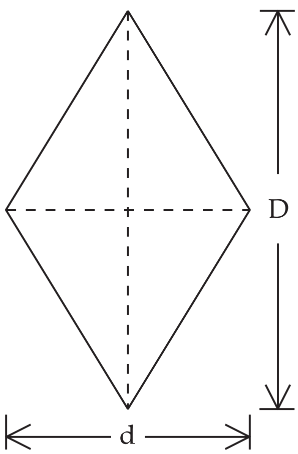
Es conveniente que la deducción de las fórmulas anteriores esté precedida, y acompañada, de diversas actividades y problemas para que los alumnos se acostumbren y manejen con soltura las ideas de partición y figuras equivalentes. No es necesario deducir todas las fórmulas en el pizarrón, pues algunas podrán proponerse como problemas para discutir y resolver en clase.

Por ejemplo

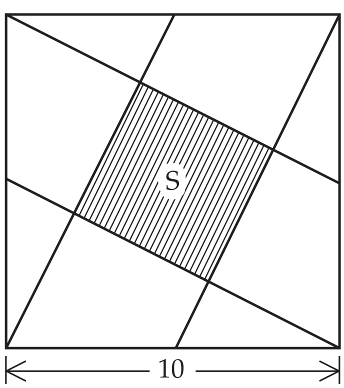
1. ¿Cómo se obtiene la fórmula para calcular el área de un paralelogramo en un caso como el siguiente?



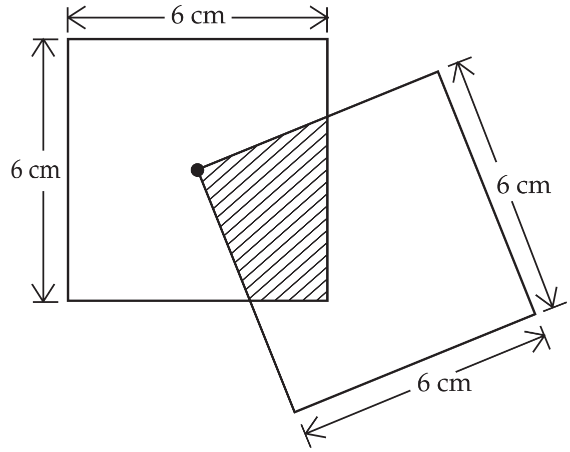
2. ¿Cuál es la fórmula para obtener el área del rombo?



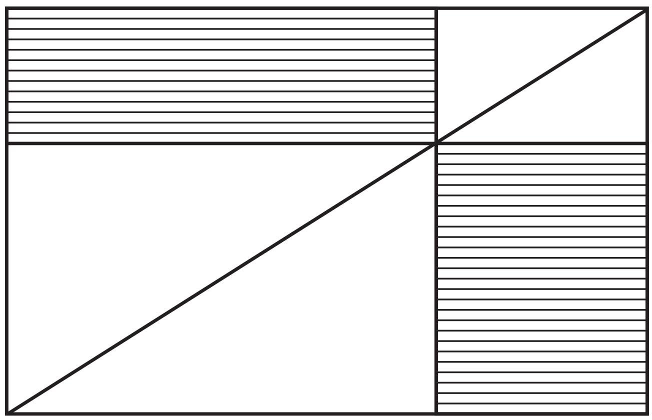
3. ¿Cuál es el área de la parte sombreada S?



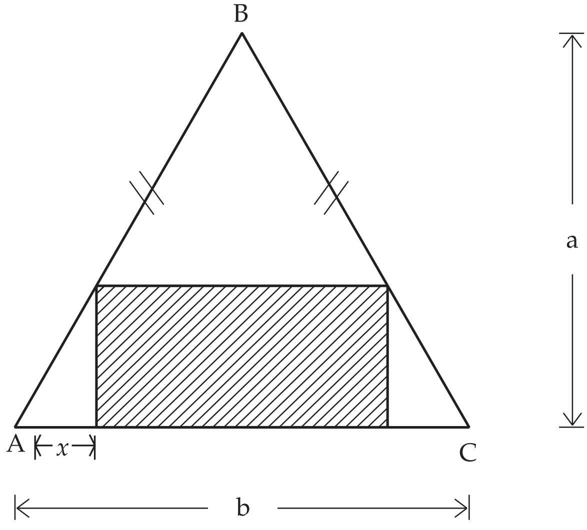
4. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?



5. ¿Tienen la misma área las dos partes sombreadas de la figura siguiente?



6. ¿Cuánto debe medir *x* para que el área del rectángulo sombreado sea la mitad de la del triángulo isósceles?

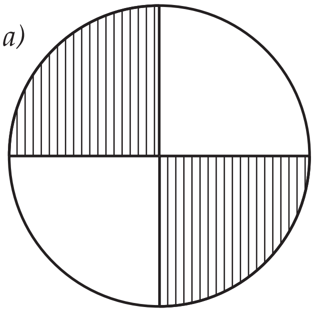


Área del círculo

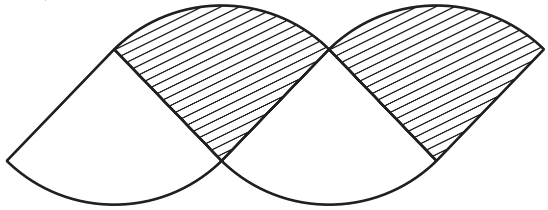
La fórmula para obtener el área de un círculo no puede demostrarse utilizando sólo las nociones de descomposición y equivalencia de figuras, pero las siguientes figuras ilustran una idea para tratar este tema con los alumnos:

1.

a)

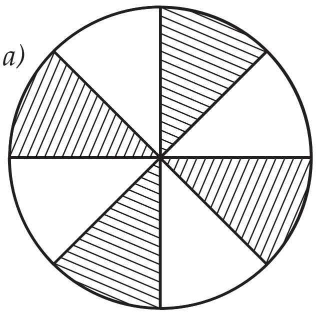


b)

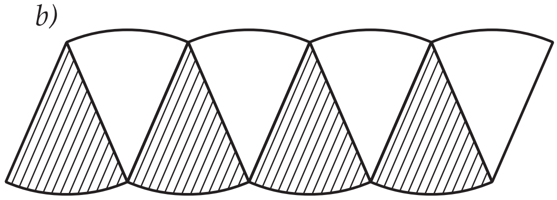


2.

a)

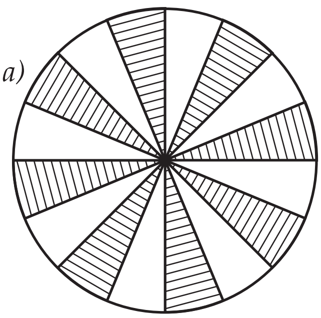


b)

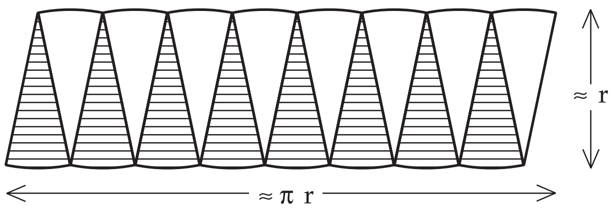


3.

a)



b)



En la última figura se ve que:

$$\text{Área del círculo} \approx (\pi r)r = \pi r^2$$

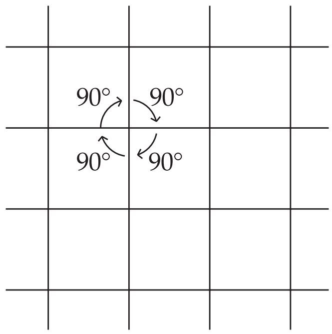
donde ≈ quiere decir *aproximadamente*. Esto es:

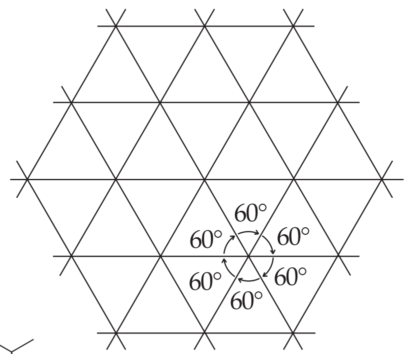
$$\text{Área del círculo} \approx \pi r^2$$

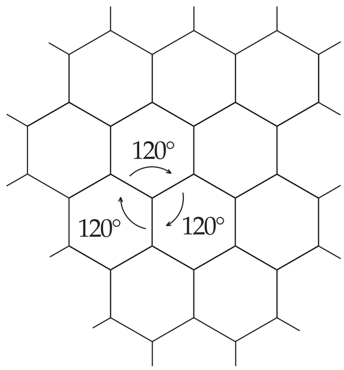
Dividiendo el círculo en gajos cada vez más finos uno llega a convencerse de la igualdad.

Recubrimiento del plano por polígonos regulares

El plano puede cubrirse utilizando triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares del mismo tamaño; tal y como se muestra a continuación:



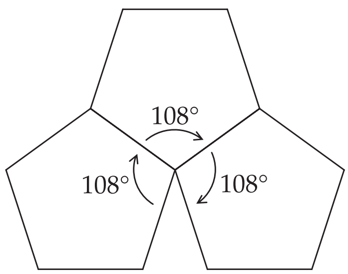




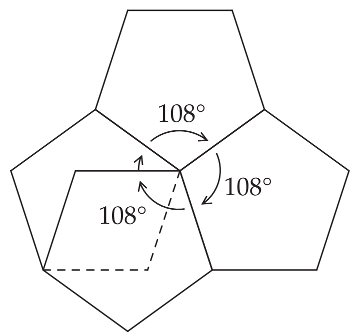
1. ¿Existen otros recubrimientos del plano que sólo utilicen polígonos regulares de la misma forma y tamaño?

Conviene dejar que los alumnos experimenten y se convenzan de que la respuesta es negativa, para lo cual necesitarán recortar pentágonos, heptágonos,... y tratar de utilizarlos para cubrir el plano.

Es fácil ver por qué no se puede cubrir el plano con pentágonos regulares. Al intentar hacerlo se descubre que en un vértice del recubrimiento tendrían que coincidir exactamente tres o cuatro pentágonos, pero esto no es posible porque el ángulo interior de un pentágono mide 108º y al multiplicar 108 por tres o por cuatro no se obtiene 360, sino que en un caso el resultado es menor y en el otro mayor.



$3 \times 108° = 324°$



$4 \times 108° = 432°$

En forma similar es posible ver que el plano no puede recubrirse sólo con heptágonos, o sólo con octágonos,... regulares del mismo tamaño. Para demostrar en general que los únicos polígonos regulares útiles para recubrir el plano sólo son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono, con las condiciones dadas se podría construir una tabla donde aparezcan las medidas de los ángulos interiores de los polígonos regulares y sus productos por 3, por 4, por 5, ...

	POLÍGONO REGULAR	ÁNGULO INTERIOR	$\times 3$	$\times 4$	$\times 5$	$\times 6$	$\times 7$
→	Triángulo	60º	180º	240º	300º	360º	
→	Cuadrado	90º	270º	360º			
	Pentágono	108º	324º	432º			
→	Hexágono	120º	360º				
	Heptágono	128º	384º				
	Octágono	135º	405º				
	Nonágono	140º	420º				

Demostraciones visuales del teorema de Pitágoras

Éste es el teorema más conocido de las matemáticas. Fue descubierto por los antiguos babilonios, pero la primera demostración general se le atribuye a Pitágoras en el siglo VI a.C. Desde entonces se han encontrado muchas demostraciones diferentes. En su libro *La proposición pitagórica*, E.S. Loomis ha reunido 370 pruebas del famoso teorema.

TEOREMA DE PITÁGORAS

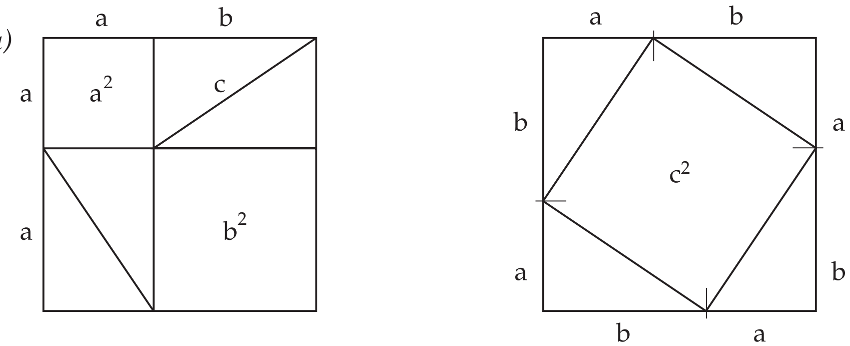
En un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Muchas de estas demostraciones están basadas en las ideas de partición y equivalencia de áreas, por lo que tienen un fuerte carácter visual que las hace accesibles. No hay razón para que los alumnos sólo conozcan una demostración del teorema de Pitágoras, sino que conviene proporcionarles varias de estas demostraciones visuales y pedirles que reconstruyan el argumento subyacente en ellas.

Por ejemplo

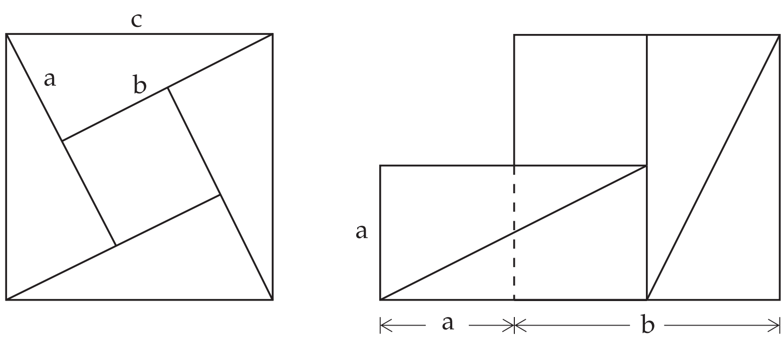
1. A partir de las siguientes figuras ¿cómo explicaría que el teorema de Pitágoras es cierto?

a)



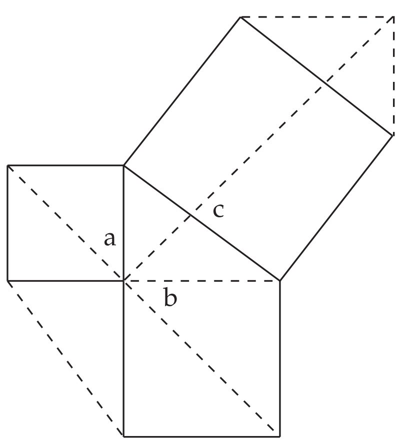
$a^2 + b^2 = c^2$

b)



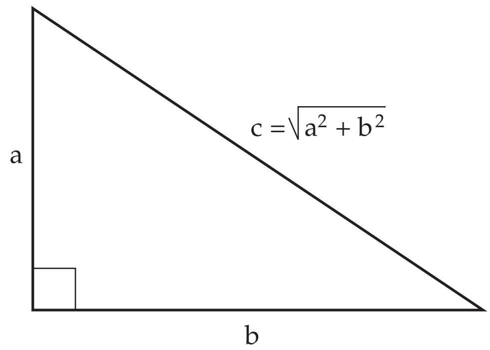
$c^2 = a^2 + b^2$

c)



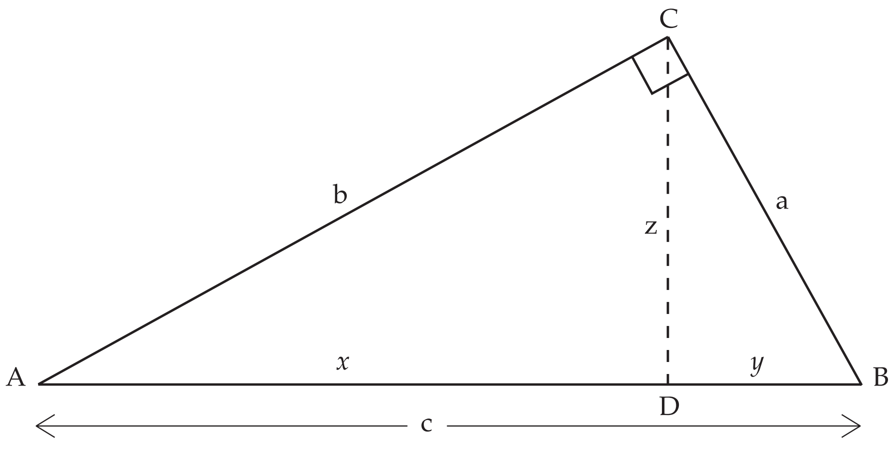
$a^2 + b^2 = c^2$

Las demostraciones visuales del teorema de Pitágoras son útiles para que los alumnos practiquen las ideas de descomposición de figuras y equivalencia de áreas. Sin embargo, en la mayoría de sus aplicaciones este teorema es visto como una relación entre las longitudes de la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo.



Por ello es importante que los alumnos también conozcan demostraciones del teorema de Pitágoras donde se manejen ideas más cercanas a sus aplicaciones.

Consideremos un triángulo rectángulo ABC y tracemos la perpendicular CD, tal y como aparece en la figura:



Como los triángulos ABC, ACD y CBD son semejantes (¿por qué?), se tiene que:

$$\frac{b}{c} = \frac{x}{b} \qquad \text{de donde } b^2 = cx \text{ – – – 1)}$$

$$\frac{a}{y} = \frac{c}{a} \qquad \text{de donde } a^2 = cy \text{ – – – 2)}$$

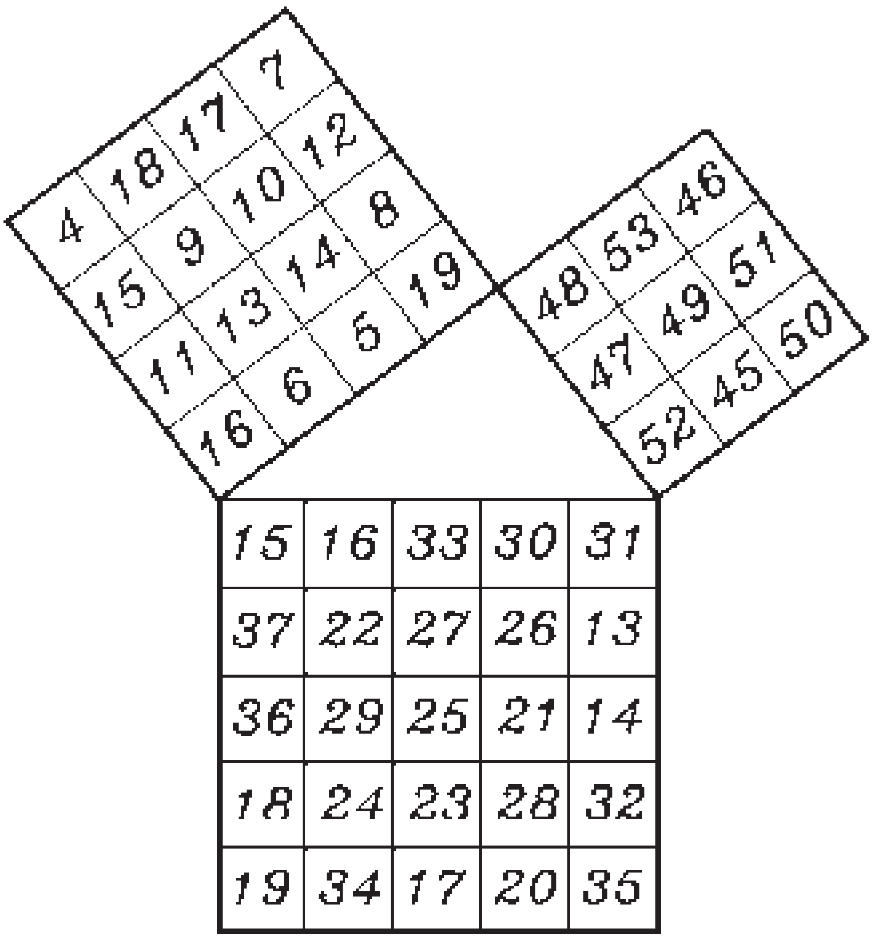
Sumando 1) y 2):

$$a^2 + b^2 = c\,(\underbrace{x + y}_{c}) = c^2$$

Y por tanto:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Otros temas de geometría que podrán servir al profesor para iniciar a sus alumnos en el razonamiento deductivo son: el estudio de las propiedades de los triángulos y cuadriláteros; los teoremas sobre rectas paralelas, incluido el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y otros resultados relacionados; la geometría del círculo, en particular, los teoremas del ángulo inscrito y semiinscrito; etcétera.

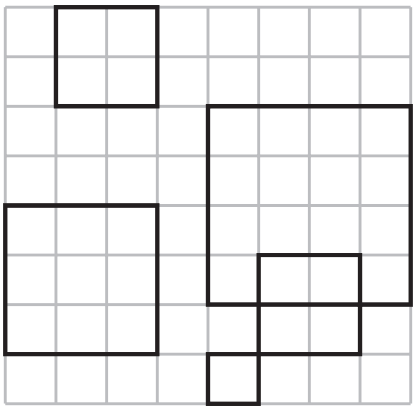


Cada cuadrado es mágico y la suma de los números de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual a la suma de los números del cuadrado construidos sobre la hipotenusa.

Un ejemplo de razonamiento inductivo

Es conveniente terminar esta sección dedicada al razonamiento deductivo con un ejemplo de un problema que puede explorarse en forma inductiva. La inducción y la deducción son inseparables al momento de resolver problemas y, en general, al hacer matemáticas, por lo que los alumnos deberán tener la oportunidad de practicar constantemente ambas formas de razonamiento.

1. ¿Cuántos cuadritos de lados 1×1, 2×2, 3×3, ... podemos formar en una cuadrícula de lados $n\times n$? Por ejemplo, en la siguiente cuadrícula de lados 8×8 están indicados algunos cuadritos de lados 1×1, 2×2, 3×3,...



Para buscar la respuesta al problema se puede construir la siguiente tabla:

NÚMERO DE CUADRITOS

CUADRÍCULA	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6
1×1	1					
2×2	4	1				
3×3	9	4	1			
4×4	16	9	4	1		
5×5	25	16	9	4	1	
6×6	36	25	16	9	4	1

y así sucesivamente.

Según puede verse en la tabla, el número total de cuadritos de lados 1×1, 2×2, 3×3, ..., que pueden formarse en una cuadrícula de lados $n \times n$ está dado por la suma:

$$1 + 4 + 9 + ... + n^2$$

Aunque desde un punto de vista estricto, la fórmula anterior todavía no está demostrada, la búsqueda de regularidades a partir del análisis de casos particulares es algo necesario para aprender a conjeturar resultados. Esta búsqueda no debe hacerse a ciegas, sino en forma organizada. Por ejemplo, en el problema anterior, el uso de una tabla para sistematizar los resultados del análisis permitió reconocer un patrón y avanzar una respuesta.

Con frecuencia se encuentra que al representar en tablas o en forma geométrica un problema originalmente planteado en la aritmética o el álgebra, se reconocen patrones de comportamiento que permiten entenderlo o resolverlo mejor.

Por ejemplo, si se suman los números impares a partir de 1, se obtiene:

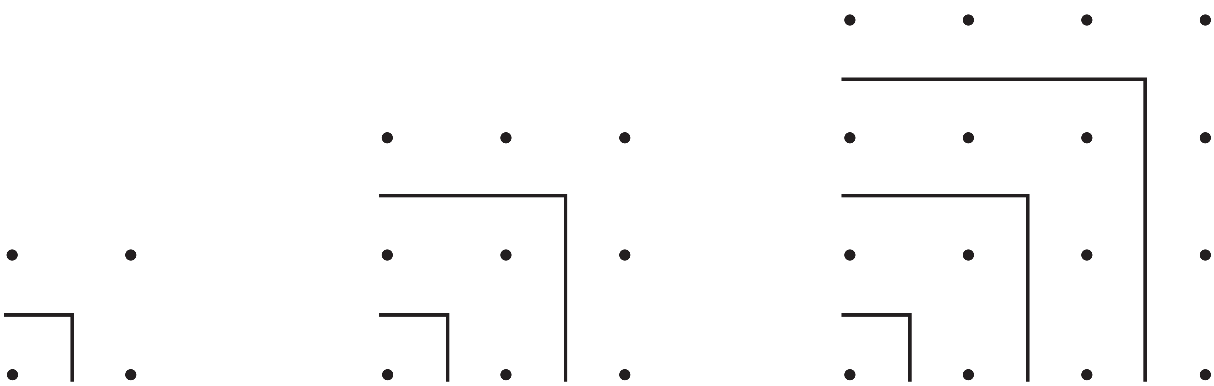
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

Es decir, al sumar los impares se obtienen los cuadrados, pero no es claro si se trata de una casualidad o si es algo que ocurrirá siempre. Esta duda desaparece cuando la situación se representa geométricamente como sigue:

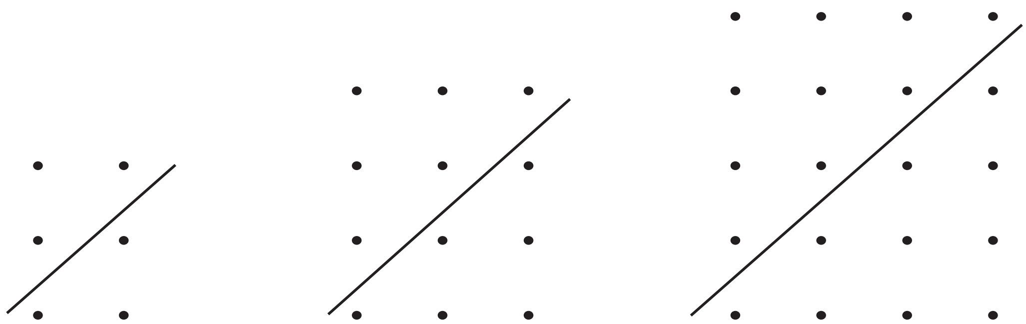


$1 + 3 = 2^2$ $\quad$ $1 + 3 + 5 = 3^2$ $\quad$ $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

2. Encuentre el valor de las sumas:

$$1 + 2, \quad 1 + 2 + 3, \quad 1 + 2 + 3 + 4, \ldots$$

Por medio de una representación geométrica se ve que:



$$1 + 2 = \frac{2 \times 3}{2} \qquad 1 + 2 + 3 = \frac{3 \times 4}{2} \qquad 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \times 5}{2}$$

En general:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n + 1)}{2}$$

Los ejemplos anteriores ilustran un hecho importante: las figuras no saben mentir. El profesor sabrá utilizar este hecho de manera adecuada.

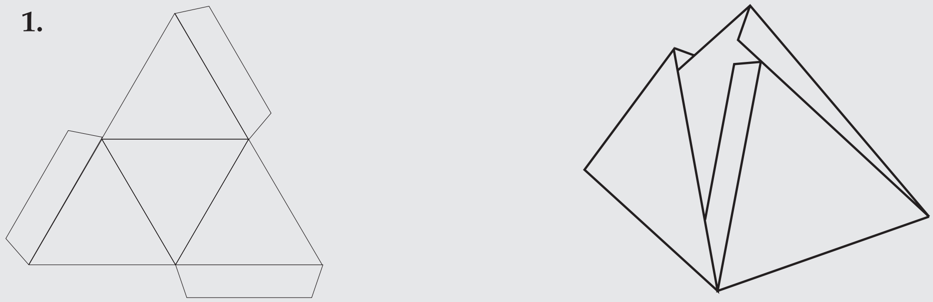
Sólidos

Representaciones planas

La enseñanza de la geometría en la educación secundaria deberá proporcionar a los alumnos diversas oportunidades de visualizar, interpretar y trabajar con figuras tridimensionales. Cada vez que sea posible y se considere necesario, se recurrirá a la manipulación de los modelos físicos de los sólidos geométricos y otros objetos del mundo real, como una forma de desarrollar la imaginación e intuiciones espaciales de los alumnos y facilitar la comprensión y el acceso a ideas más abstractas.

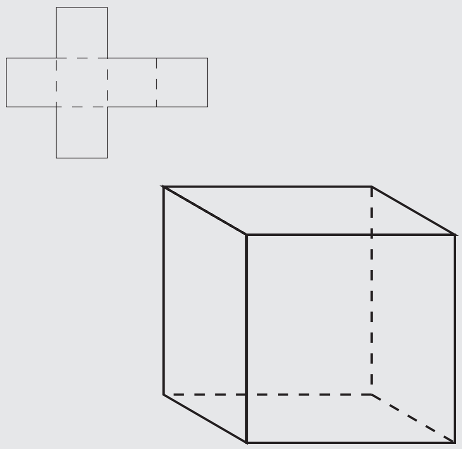
LOS POLÍGONOS REGULARES Y SU DESARROLLO

1.



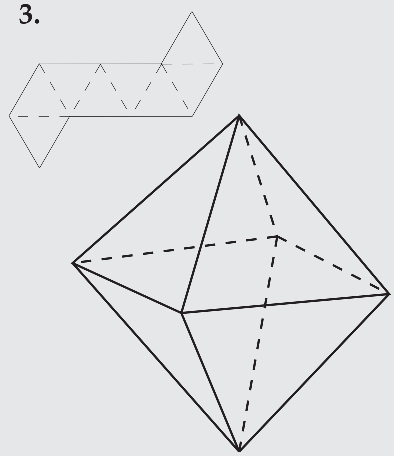
Tetraedro regular

2.



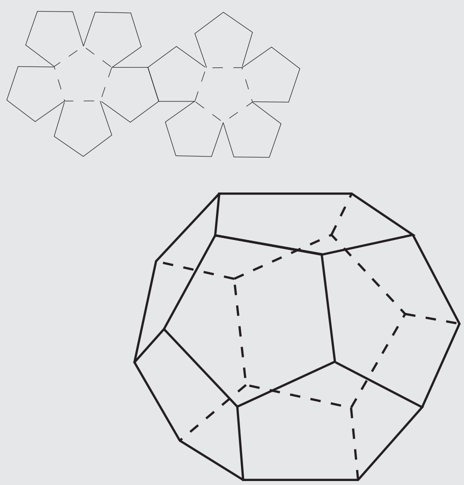
Hexaedro regular o cubo

3.



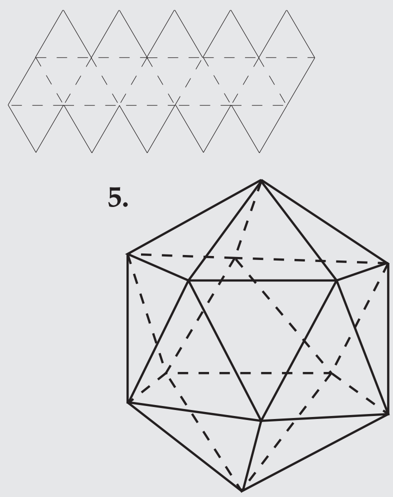
Octaedro regular

4.



Dodecaedro regular

5.



Icosaedro regular

Se buscará, en particular, la familiarización con los sólidos geométricos por medio de actividades que favorezcan:

- La manipulación de objetos físico-tridimensionales y la construcción de modelos de los sólidos comunes.
- La observación de las similaridades y diferencias entre los diferentes tipos de sólidos.
- La comprensión y uso adecuado de los términos y el lenguaje utilizado en su descripción.
- La observación y enunciado de las características de los poliedros: forma de las caras, número de vértices, aristas y caras, etcétera.

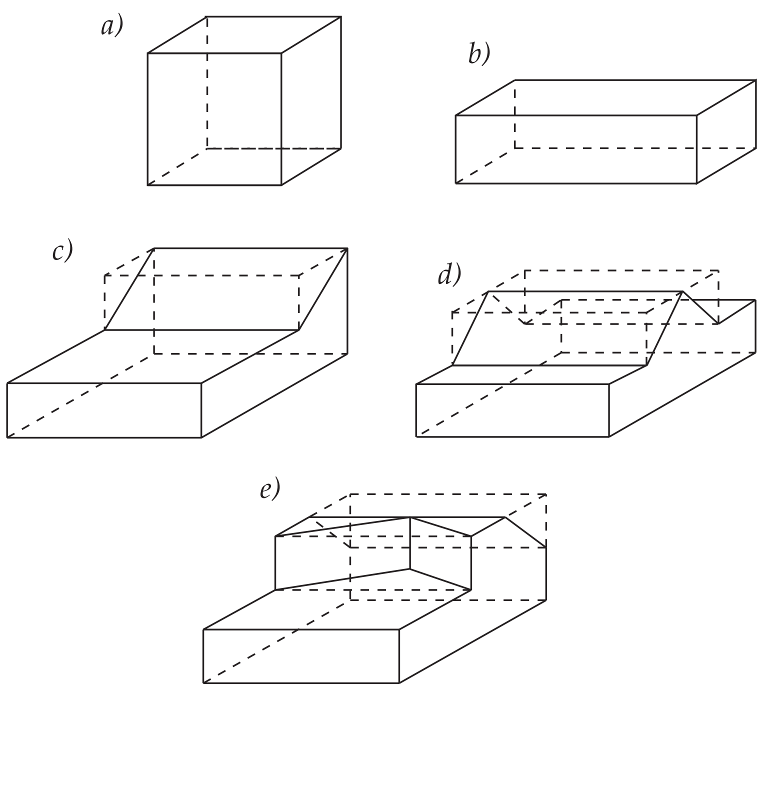
Es importante que los alumnos desarrollen gradualmente sus habilidades para la representación plana de objetos en el espacio, por medio de actividades y problemas que impliquen:

a) Dibujo en perspectiva de paralelepípedos, cubos y cuerpos formados por la combinación o partición simple de los anteriores.

b) Dibujo y recuperación de un sólido a partir de sus vistas frontal, laterales y de planta.

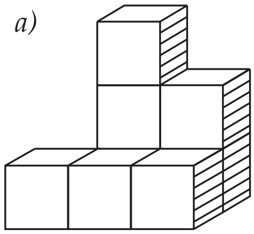
c) Uso del dibujo en perspectiva de cubos y paralelepípedos rectos como auxiliar en el dibujo de prismas, pirámides y otros poliedros.

1. Dibuja en tu cuaderno los siguientes cuerpos:

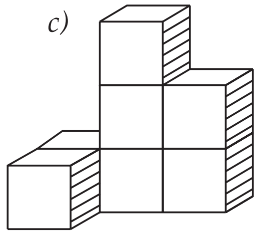


2. Dibuja las vistas frontal, de planta y laterales de los siguientes sólidos, formados por cubitos cuyas aristas miden 2 cm.

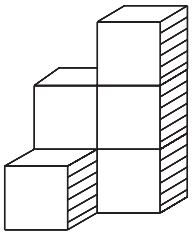
a)



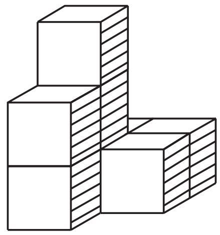
c)



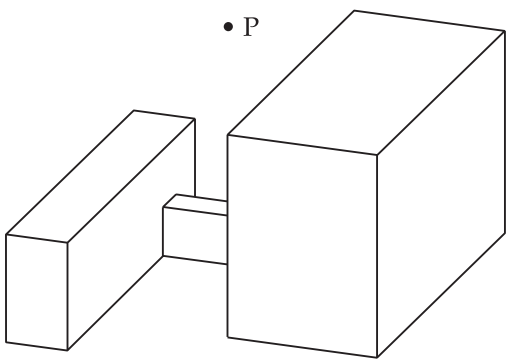
b)



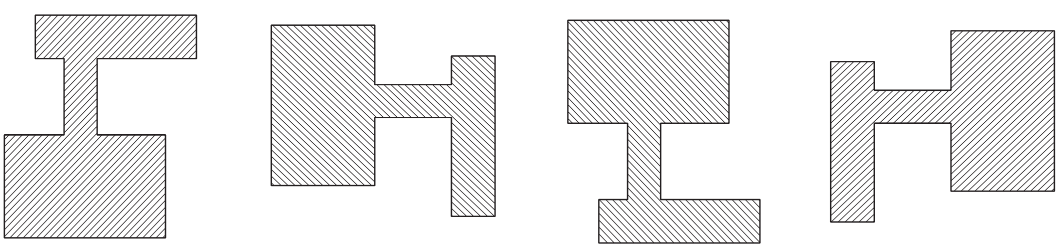
d)



3. El siguiente es el dibujo en perspectiva de un edificio.

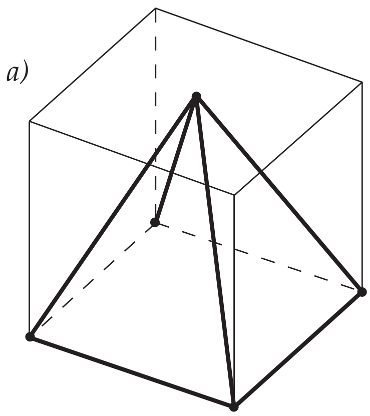


¿Cuál de las siguientes siluetas corresponde al edificio visto desde el punto P?

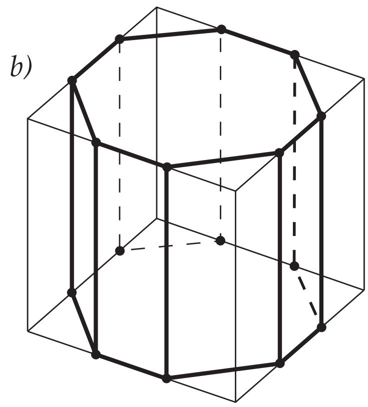


A B C D

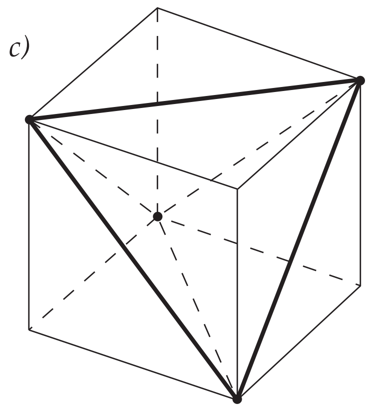
4. Dibujen en su cuaderno los siguientes cuerpos.



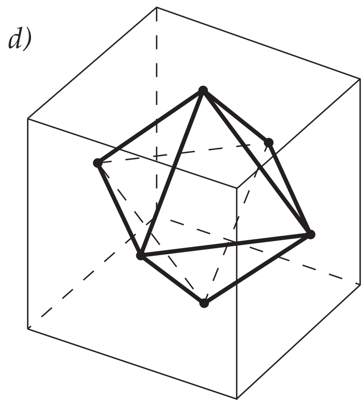
Pirámide regular
de base cuadrada



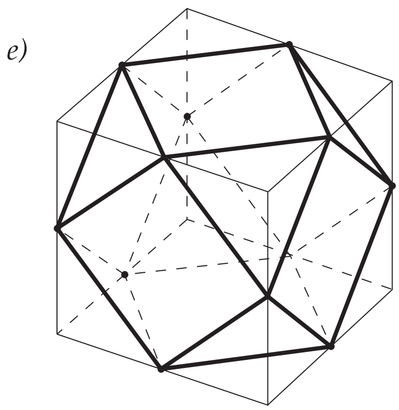
Prisma octagonal recto



Tetraedro regular



Octaedro regular



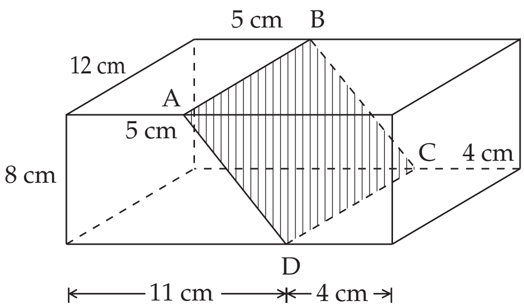
Cubo-octaedro
de Arquímedes

Los programas recomiendan que se propongan actividades para observar y explorar las características de las secciones que se forman al cortar un sólido por un plano, avanzando, en el tercer grado, hasta el estudio de las secciones que se forman al cortar prismas y pirámides por una familia de plano paralelos (casos sencillos).

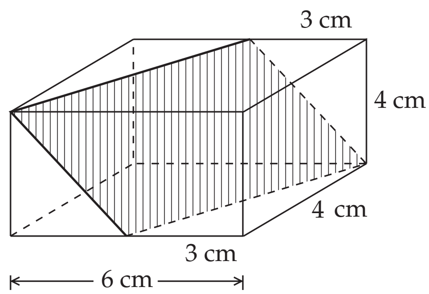
Por ejemplo

1. En cada inciso está dibujado un paralelepípedo recto y la sección formada al cortarlo por un plano. Indicar en cada caso cuáles son las características del cuadrilátero ABCD y sus dimensiones.

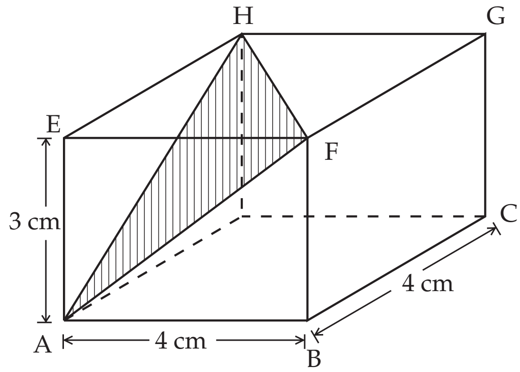
a)



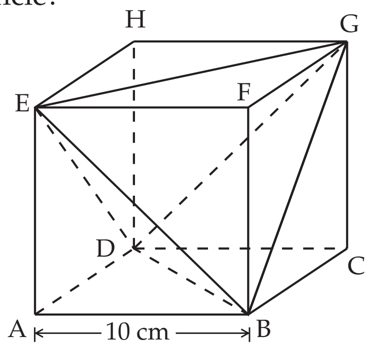
b)



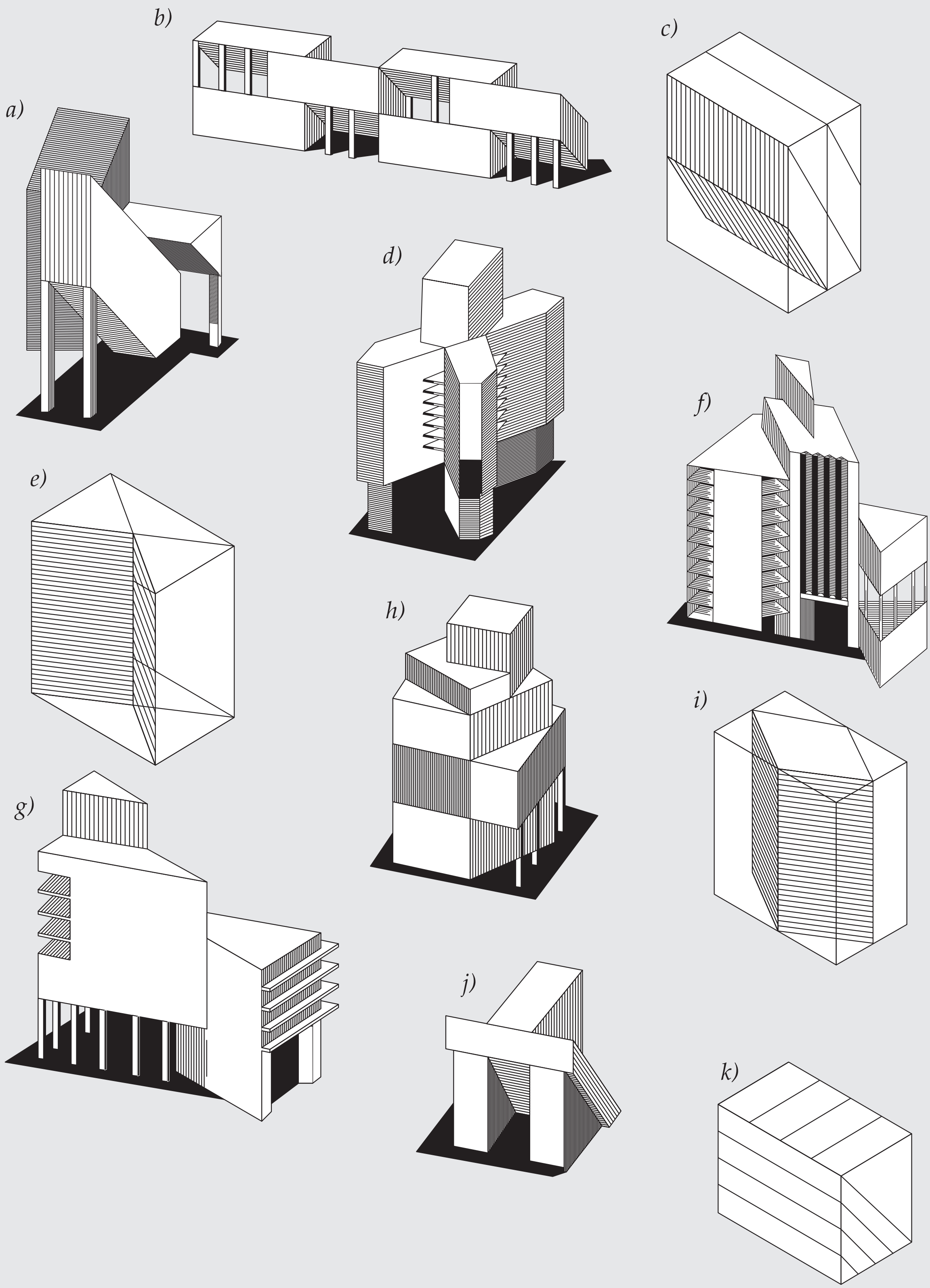
2. ¿Cómo es el triángulo AFH? ¿Cuáles son sus dimensiones? ¿Su área?



3. ¿Cuál es la naturaleza de la pirámide EBDG inscrita en el cubo? ¿Cuánto miden sus aristas? ¿Cuánto su superficie?



CUERPOS Y SUPERFICIES PRISMÁTICAS

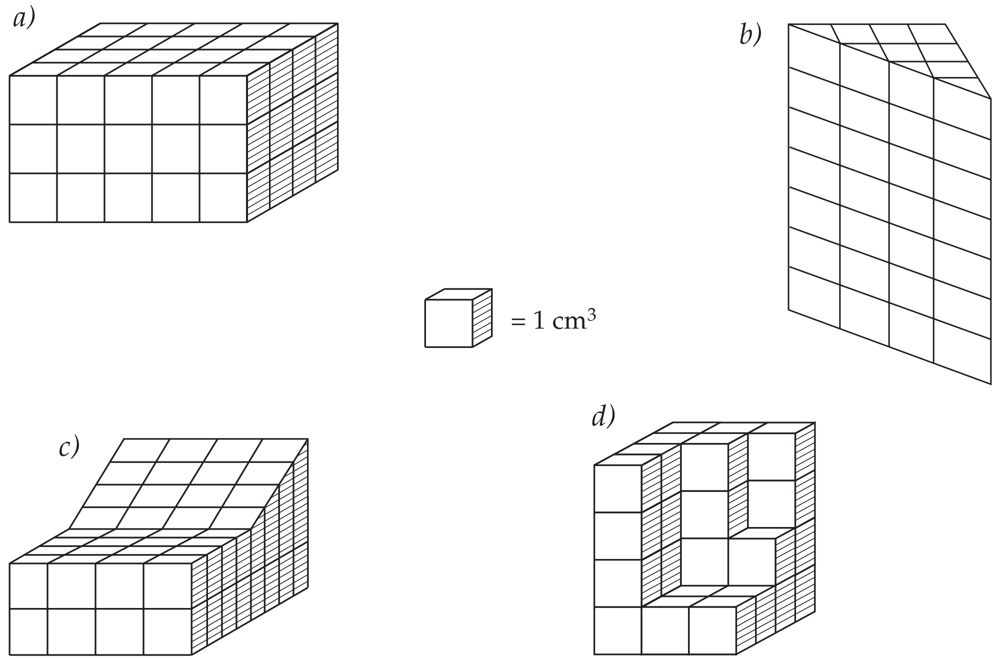


Cálculo de volúmenes

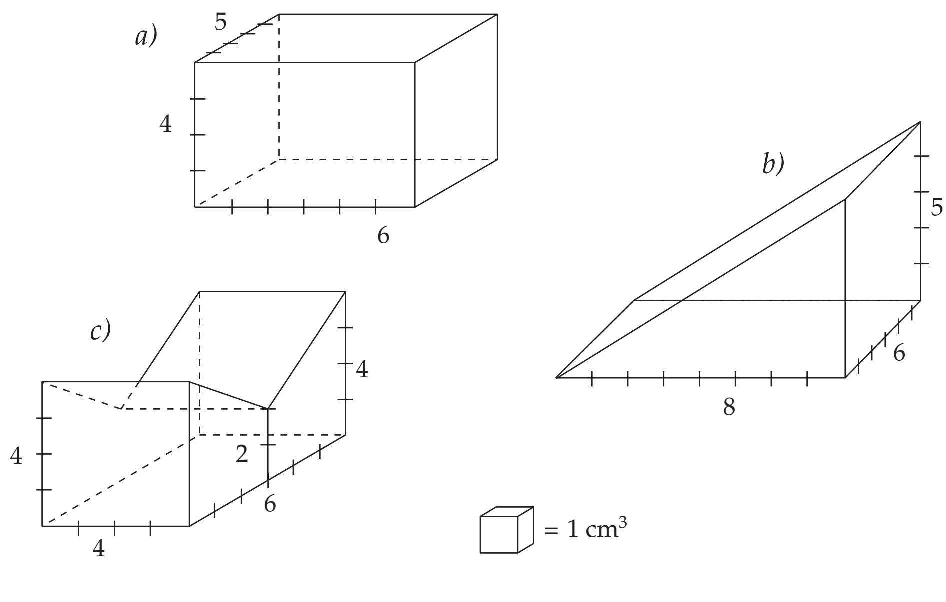
El cálculo de volúmenes se inicia desde el primer año con la obtención del volumen de cubos y paralelepípedos rectos, así como de cuerpos por la composición o partición simple de los anteriores.

Por ejemplo

1. ¿Cuál es el volumen de los siguientes cuerpos?



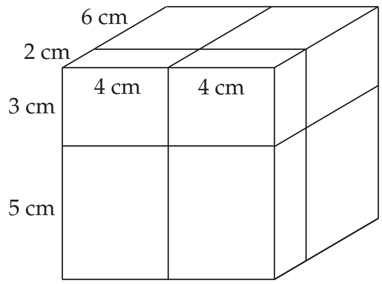
2. ¿Cuál es el volumen de los siguientes cuerpos?



Las situaciones anteriores podrán ser precedidas de actividades y problemas que faciliten su comprensión.

Por ejemplo

1. Dibujen en su cuaderno, por separado, cada una de las partes en que está dividido el siguiente cubo.



Como en el caso del cálculo de perímetros y áreas, la obtención de volúmenes no debe limitarse a la resolución de actividades y problemas planteados únicamente sobre papel, sino que conviene proponer otras que muestren la relación entre las nociones de volumen y capacidad —conduciendo al uso efectivo de los instrumentos de medida— y desarrollen en los alumnos el sentido de la medición práctica y la magnitud.

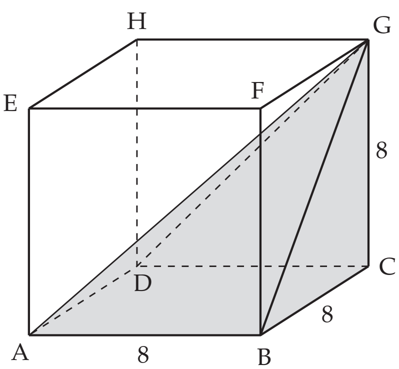
Salvo por los casos más simples, las fórmulas para calcular el volumen de los sólidos y cuerpos geométricos no se deducen tan fácilmente como las que sirven para calcular áreas de figuras rectilíneas, por lo que sólo podrán justificarse empíricamente o demostrarse en algunos casos particulares.

Por ejemplo

2. Construir recipientes en forma de pirámides y conos y verificar que su capacidad es un tercio de la de un prisma o un cilindro con la misma base y altura.

¿Qué relación hay entre el volumen de la pirámide respecto al volumen del cubo?

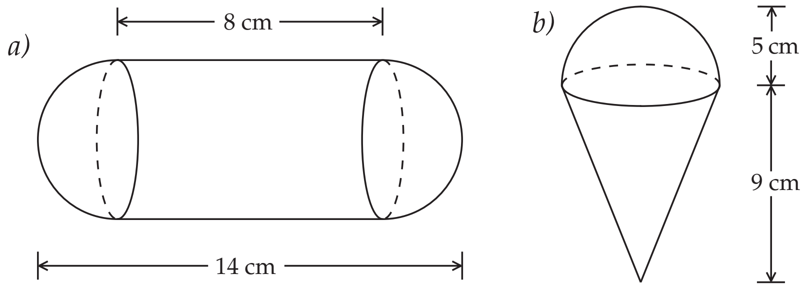
3. Si el profesor lo considera conveniente, los alumnos podrán realizar un patrón y armar la pirámide para verificar que con tres pirámides iguales a ella se forma el cubo.



Las actividades en clase deberán promover el uso adecuado de una tabla de fórmulas, sin que sea necesaria su memorización en todos los casos. Es recomendable no reducir el cálculo de volúmenes a la utilización de una fórmula a la vez, sino que conviene plantear problemas donde se requiera que los alumnos utilicen y combinen varias fórmulas para calcular el volumen. Los primeros problemas podrán presentar datos numéricos:

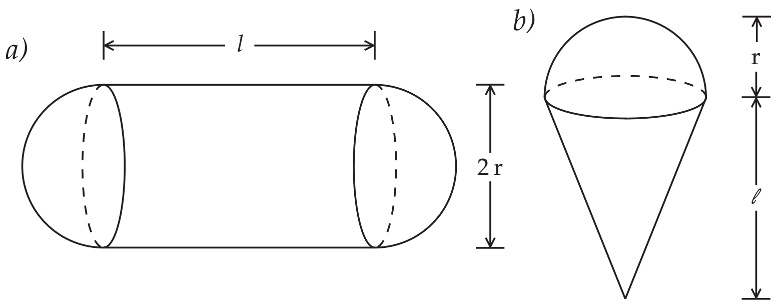
Por ejemplo

1. En cada caso calcula el volumen.

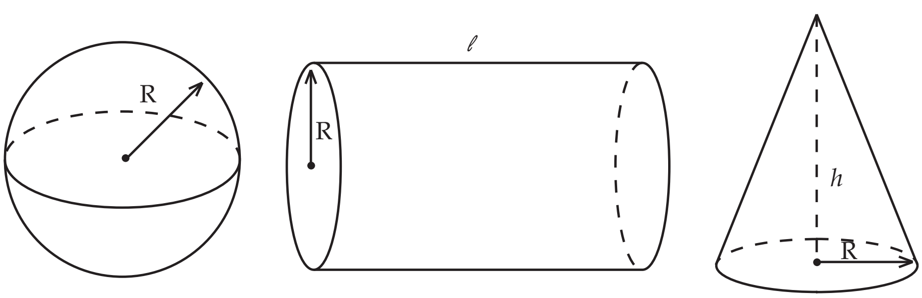


Más adelante, cuando los alumnos estén más acostumbrados a situaciones como las anteriores, hayan adquirido soltura en el manejo del lenguaje algebraico y desarrollado su imaginación espacial se les podrá pedir que obtengan la fórmula para calcular el volumen de un sólido compuesto, o deducir la fórmula correspondiente para una pirámide o cono truncado, etcétera.

2. En cada caso expresa una fórmula para calcular el volumen.



3. ¿Cuánto deben valer ℓ y h para que el cilindro y el cono tengan el mismo volumen que la esfera?



El espacio y el razonamiento deductivo

Sin avanzar demasiado dentro de la geometría del espacio, el estudio de los sólidos ofrece numerosas situaciones favorables para el desarrollo del pensamiento deductivo. Por ejemplo, en temas como los siguientes

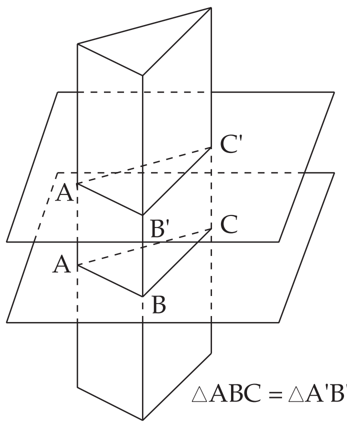
a) Deducción de las fórmulas para obtener el volumen de prismas rectos y troncos de pirámides y conos.

b) Estudio de las secciones formadas al cortar un prisma o una pirámide por dos o más planos paralelos.

El profesor buscará entre estos temas, u otros que según su criterio resulten adecuados, aquellas situaciones que sirvan para que se practique el razonamiento deductivo, tomando en cuenta el grado de madurez alcanzado por sus alumnos.

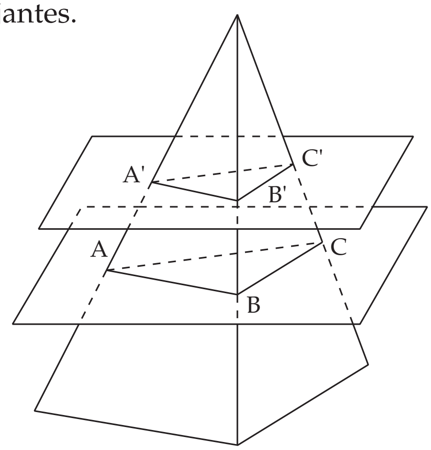
Por ejemplo

1. Mostrar que al cortar un prisma por planos paralelos, las secciones que se obtienen son iguales.



$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

2. Mostrar que al cortar una pirámide por planos paralelos, las secciones que se obtienen son semejantes.



$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Presentación y tratamiento de la información

- La presentación y el tratamiento de la información en la educación secundaria
- Tablas y gráficas
- Cantidades absolutas y relativas
- Descripción de una lista de datos
- El tratamiento de la información y las funciones

Presentación y tratamiento de la información

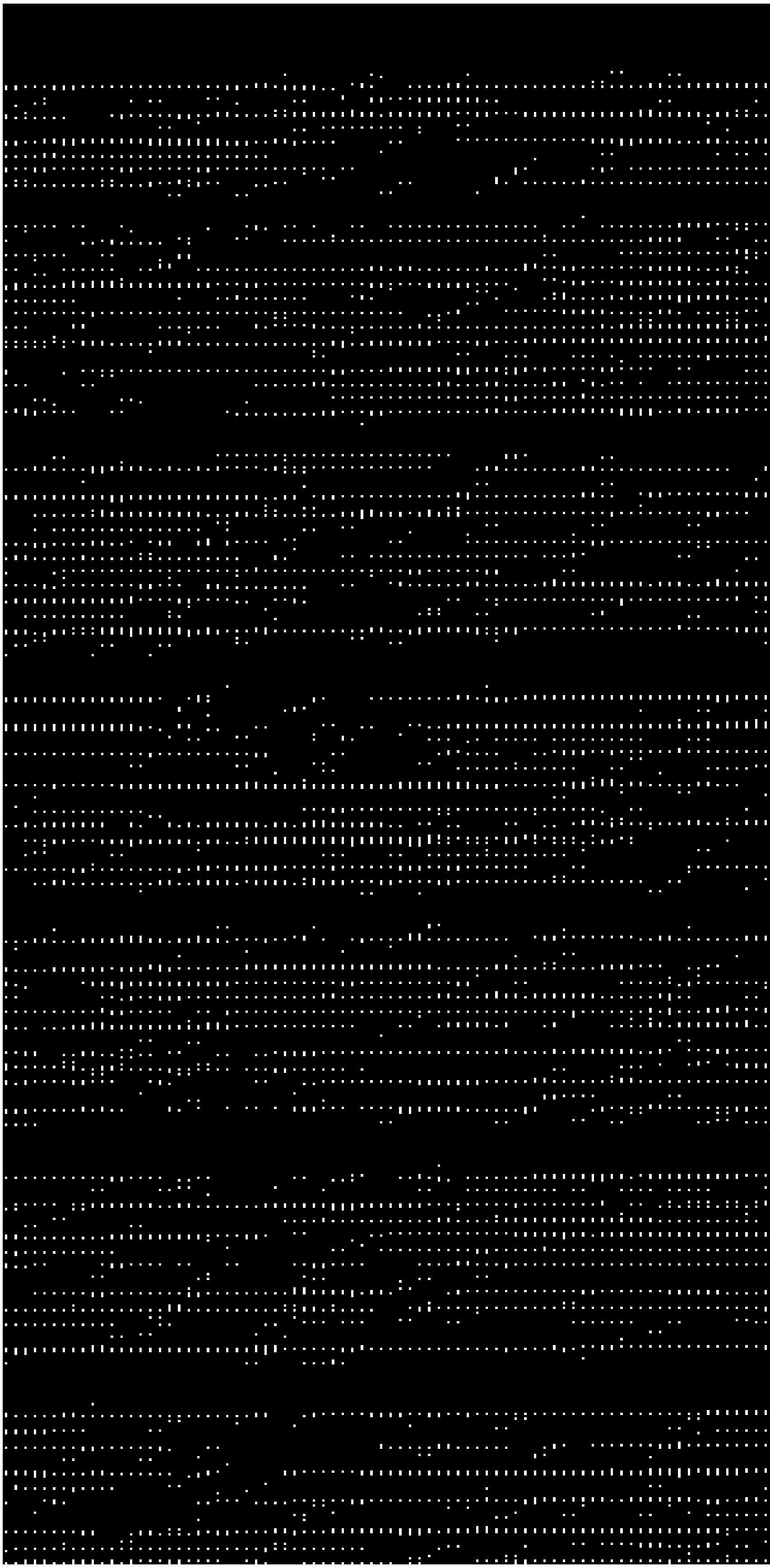
La presentación y el tratamiento de la información en la educación secundaria

Hasta hace poco tiempo se tenía la idea de que bastaba una buena selección de temas de aritmética, geometría y álgebra para proporcionar a los alumnos de educación secundaria los conocimientos necesarios para enfrentar los requerimientos de la vida cotidiana y proseguir con éxito sus estudios en grados superiores. En la actualidad, sin embargo, una enseñanza básica de las matemáticas que no contemple aspectos relacionados con la presentación y el tratamiento de la información, así como nociones de probabilidad, se considera insuficiente para que los alumnos desarrollen los conocimientos, habilidades y actitudes que les permitirán más tarde convertirse en ciudadanos atentos a lo que ocurre en su entorno.

Este punto de vista puede justificarse con argumentos que consideran tanto las aplicaciones de las matemáticas en diversas áreas del conocimiento y la actividad humana, como su dimensión formativa y su utilidad en el mundo real.

En las ciencias y las técnicas, la probabilidad y el tratamiento de la información, incluidos los temas clásicos de la estadística y otros de desarrollo más recientes, tienen una importancia cada vez mayor. Así, mientras que en las ciencias básicas el uso de modelos no deterministas ayuda a comprender mejor la naturaleza y sus fenómenos, en la economía y las ciencias sociales, lo mismo que en la tecnología y las diversas disciplinas profesionales, se recurre cada vez más a la probabilidad y la estadística para analizar y procesar datos, para modelar situaciones y para hacer predicciones.

Salvo quizá por las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética, no hay otra parte de las matemáticas a la que estén más expuestas las personas que a las formas estadísticas de presentar y tratar la información. La sociedad genera a ritmo creciente gran cantidad de datos que se presentan por medio de porcentajes, tasas e índices, o bien en forma de tablas, gráficas e inferencias estadísticas. La gente necesita aprender a transformar esta información en conocimiento válido para comprenderla y poder tomar decisiones racionales, por lo que saber manejar este tipo de cifras, extraer información de una tabla, interpretar gráficas y evaluar críticamente argumentos basados en estadísticas —en los resultados de una encuesta por ejemplo— son habilidades cada vez más necesarias para todos.



Un ejemplo de tratamiento gráfico de la información

Ciclos de alimentación de un niño que lacta el pecho registrados a partir del día 11 de haber nacido hasta el día 182 de vida. Las líneas continuas representan los periodos de sueño, los puntos indican las tetadas, y los espacios en blanco, los periodos de vigilia. Es evidente que la madre ha acostumbrado progresivamente al niño a renunciar a la alimentación nocturna, por lo que se merma el efecto contraceptivo de la lactancia.

Aunque los temas de probabilidad y tratamiento de la información no son nuevos en el currículum de matemáticas de la educación secundaria, con frecuencia se les concede poca importancia o no se estudian. Este fenómeno tiene varias causas, entre las cuales pueden citarse, por un lado, el hecho circunstancial de que dichos temas aparecían por lo general al final de los programas y, por el otro, el hecho más fundamental de que en nuestro medio su estudio tiene menos tradición que el estudio de la aritmética, el álgebra y la geometría. Sin embargo, muchas de las ideas básicas del tratamiento de la información y la probabilidad son accesibles y pueden dar lugar a actividades interesantes, al mismo tiempo que refuerzan el aprendizaje de otras partes de las matemáticas elementales. Entonces, la primera recomendación para el profesor es que reconsidere el balance tradicional y no sacrifique estos temas o los deje para el final de su curso, sino que procure que a lo largo del mismo los alumnos tengan numerosas ocasiones de practicarlos.

En los programas vigentes, los temas tradicionales de estadística descriptiva se verán dentro del contexto más amplio de la organización, presentación y tratamiento de la información. El propósito es que los alumnos:

- Conozcan y se familiaricen con las tablas y gráficas utilizadas con más frecuencia en la presentación de la información.

- Se acostumbren al uso de cantidades relativas y sus aplicaciones:

  – Para comparar datos provenientes de bases diferentes.
  – Para resaltar las magnitudes relativas de ciertas cantidades.
  – En la construcción de ciertos índices o indicadores, etcétera.

- Utilicen tablas y gráficas como auxiliares en la exploración de casos particulares, la elaboración de conjeturas y la resolución de problemas.

- Aprendan a reconocer y resumir los hechos importantes que se presentan en un conjunto de datos y desarrollen sus habilidades tanto para comprender como para evaluar inferencias y argumentos basados en datos.

- Exploren las relaciones entre dos o más cantidades, utilicen tablas y gráficas para presentar esas relaciones y, en casos sencillos, desarrollen criterios para pasar de una tabla o una gráfica a una fórmula.

En particular es importante que los alumnos comprendan gradualmente la diferencia que hay entre los resultados de un análisis estadístico y las afirmaciones concluyentes de otras partes de las matemáticas. Conviene evitar que los alumnos extrapolen y adopten actitudes extremas frente a la estadística: o bien rechazarla, porque no da lugar a resultados “exactos”, o bien aceptar acríticamente o tener una confianza exagerada en las afirmaciones basadas en datos estadísticos, sin verificar la forma como éstos fueron recolectados y si son válidos y confiables.

Para lograr los propósitos expresados en páginas anteriores, es recomendable que las actividades en clase se desarrollen a partir de problemas concretos que tengan interés y sean relevantes para los alumnos. Igualmente necesario es que se involucren activamente en las distintas fases por las que pasa la resolución de un problema, desde las etapas iniciales de discusión y planteamiento del mismo, así como la recolección de los datos, hasta la fase de presentación, discusión e interpretación de los resultados observados.

Por ejemplo, en la secundaria los alumnos están en una etapa de crecimiento y les puede interesar compararse con otros alumnos de grados superiores o inferiores, para ver cómo serán al terminar la secundaria, o cómo eran cuando la comenzaron. También se les puede proponer que determinen las características de un "estudiante promedio": edad, peso, estatura, color de ojos y de cabello, número de hermanos, deporte u ocupación preferida, etcétera.

Una actividad interesante es que utilicen la simulación para evaluar la validez de ciertas afirmaciones.

Por ejemplo

1. En un experimento para ver cuál de dos marcas de pasta dental era la preferida del público, 20 personas hicieron una selección: 14 eligieron la marca X y 6 eligieron la marca Y.

a) ¿Son estos resultados suficientes para afirmar que la gente prefiere la marca X?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que aun siendo igual la preferencia por las dos marcas, en un experimento como el anterior haya 14 o más personas que prefieran una marca sobre otra?

Para simular la situación del problema los alumnos pueden convenir en que, suponiendo la misma preferencia por ambos productos, el experimento es equivalente a lanzar 20 veces una moneda y observar las frecuencias con que salen águilas y soles. Al realizar varias veces el experimento, podrán darse cuenta de que alrededor de 25% de las veces se obtienen más de 14 águilas o más de 14 soles, lo cual quiere decir que de las veces que se repita el experimento, aproximadamente una de cada cuatro veces se va a encontrar una preferencia tan marcada por una de las marcas, sea la X o sea la Y. Por lo tanto —y a pesar de la aparente desproporción entre el número de personas que prefirieron cada marca—, los datos que se dan constituyen una base muy endeble para asegurar que la gente prefiere la marca X, ya que pueden deberse a la casualidad. □

Actividades como las anteriores introducen gradualmente a los alumnos a las nociones de estadística y los ayudan a comprender que hay muchos problemas que no pueden resolverse mediante una única observación o medición. En vez de ello, luego de recopilar y organizar gran cantidad de datos, pueden obtenerse respuestas parciales que intenten responder a preguntas como las que se presentan a continuación:

- ¿Cuáles son los datos que aparecen con mayor frecuencia y cuáles casi no aparecen?

- ¿Qué tendencias revelan estos datos? ¿Cuál es su significado y cómo puedo interpretarlos? ¿Hay otras interpretaciones posibles?

- Lo que veo, ¿puede extrapolarse a grupos más grandes? ¿A otros grupos?

- ¿Qué tipo de estudios adicionales pueden hacerse para confirmar o refutar mis interpretaciones?

Por supuesto, algunas de las preguntas anteriores requieren un grado de madurez que los alumnos tardan en alcanzar y no se espera que puedan responderse rigurosamente en la educación secundaria. Sin embargo, es recomendable que el profesor las tenga presentes al momento de seleccionar sus actividades, de manera que pueda orientar la discusión de sus alumnos para que comprendan, de manera todavía informal e intuitiva, la naturaleza de los resultados que se desprenden de un estudio estadístico y se acostumbren a los argumentos basados en datos.

La habilidad para analizar, inferir y argumentar con datos cobra un precio en tiempo y trabajo en el salón de clases. Muchas veces el estudio incompleto, o la franca omisión de los temas de presentación y tratamiento de la información, se debe a que para el profesor el tiempo de clase es valioso y considera que estas actividades le toman demasiado. Por lo tanto, es pertinente hacer algunos comentarios sobre el manejo del tiempo al impartir dichos temas:

- Algunos temas relacionados con el tratamiento de la información, como el estudio de las cantidades relativas, podrán verse o tratarse parcialmente al mismo tiempo que otros contenidos matemáticos. Esto no sólo servirá para ahorrar tiempo, sino que ayudará a comprender mejor y hacer más interesantes temas como las fracciones y la proporcionalidad, por citar sólo algunos ejemplos.

- Es más conveniente utilizar el tiempo de clase para el análisis, la discusión y el desarrollo de las nociones importantes que para procedimientos rutinarios. Copiar una tabla o dibujar una gráfica sobre el pizarrón son procesos laboriosos que pueden consumir mucho tiempo. Con frecuencia será mejor utilizar láminas grandes de papel o cartulina donde las tablas y las gráficas hayan sido previamente dibujadas. Por ejemplo, si va a utilizar una gráfica de barras, convendrá usar un rotafolio donde por medio de láminas sucesivas se muestren los datos en bruto, los datos puestos apropiadamente en tablas, la construcción de los ejes y, finalmente, las barras que representan las frecuencias. Si la escuela dispone de un retroproyector, será posible utilizar gráficas tomadas de libros, periódicos y revistas.

- Lo que es laborioso en el pizarrón, también lo es en el cuaderno. Por lo tanto, para la discusión en clase habrá casos en que será conveniente que el alumno trabaje sobre gráficas ya elaboradas, por ejemplo, recortes de periódicos y, cuando no resulte muy oneroso, fotocopias. Algunos profesores piensan que esta manera de proceder les permite analizar más situaciones; por ello propician más la actividad de leer tablas y gráficas que la de elaborarlas. Otros, en cambio, prefieren dedicar tiempo a su elaboración. En realidad ambas actividades son complementarias; lo importante es organizarlas de manera que no se corra el riesgo de agotar el tiempo en realizar tareas rutinarias y poco interesantes.

- Finalmente, debe promoverse que los alumnos utilicen la calculadora y, si tienen la posibilidad, exploren situaciones con la computadora, estos recursos pueden ser un apoyo poderoso para provocar el estudio de las matemáticas. Para los temas de presentación y tratamiento de la información, las hojas electrónicas de cálculo (por ejemplo, Excel) permiten realizar de manera sumamente flexible las tareas relacionadas con la manipulación de tablas y la elaboración de gráficas. Además, son más fáciles de utilizar que la mayoría de los lenguajes de programación o los grandes paquetes de estadística. Abren, sin duda, muchísimas posibilidades por explorar en el estudio, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria (y en todos los niveles).

Tablas y gráficas

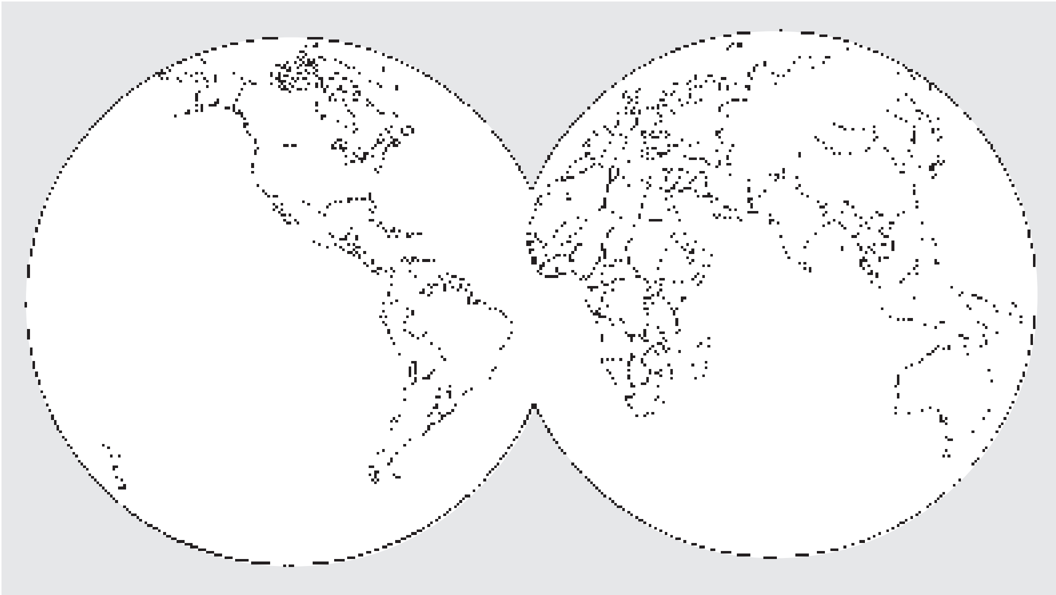
Uso de tablas

Algunas tablas sólo son una forma de organizar gran cantidad de información de manera que resulte fácil de consultar para el usuario. Otras, en cambio, buscan presentar la información de manera clara y concisa, al mismo tiempo que proporcionan elementos para facilitar la comparación entre renglones y columnas y ponen en evidencia las relaciones entre los datos. Así, en el "Cuadro comparativo de los continentes" de la página siguiente bastó agregar dos columnas de porcentajes para que resalten los tamaños relativos de los continentes, así como la distribución mundial de la población.

Como en este caso, es común que al elaborar una tabla se agreguen columnas o renglones adicionales para facilitar la comprensión de los datos. Estas columnas pueden ser de porcentajes, de frecuencias relativas o, en el caso de tablas de variación, de incrementos o tasas de crecimiento (incrementos relativos). Con el mismo propósito se escogen las unidades adecuadas, de manera que no conduzcan a cifras muy grandes o decimales muy pequeños, fuera del rango de los números que estamos acostumbrados a manejar.

Las primeras actividades podrán tener como propósito que los alumnos vean las ventajas de organizar la información en tablas.

Por ejemplo



Cuadro comparativo de los continentes

Continente	Superficie (miles de km^2)	%	Núm. habitantes (en millones)	%
África	30310	20	694	12.6
América	42500	28	743	13.5
Asia	44900	30	3331	60.7
Europa	9900	7	695*	12.7
Oceanía	8500	6	27	0.5
Antártida	14000	9	–	–
Total mundial	150000	100	5490	100**

Fuente: *Almanaque Mundial*, 1993.

* Se incluye la parte europea de Rusia (286 millones).

Por ejemplo

El siguiente texto contiene muchos datos y no es fácil de leer.
1. Elaboren una tabla donde la siguiente información resulte más accesible y la puedan localizar sin dificultad.

Megápolis

Las mayores ciudades del mundo en millones de habitantes (1990) son: Tokio (Japón) 23.4; Ciudad de México (México) y su zona metropolitana: 22.9; Nueva York (EU): 21.8; Sao Paulo (Brasil): 19.9; Shangai (China): 17.7. El continente con el mayor número de ciudades de más de 10 millones de habitantes es el asiático donde, además de Tokio y Shangai (ya citadas), se encuentran Beijing (China): 15.3; Bombay (India): 12; Calcuta (India): 11.9; Seúl (Corea del Sur): 11.8; y Osaka-Kobe (Japón): 10.7. Le sigue el continente americano con Río de Janeiro (Brasil): 14.7; Los Ángeles (EU): 13.3; y Buenos Aires (Argentina): 11.4. Las otras ciudades con más de 10 millones de habitantes son Yakarta (Indonesia): 11.4; París (Francia): 10.9; El Cairo (Egipto): 10; y Londres (Inglaterra): 10. (**Fuente:** Guía Mundial, 1993).

LAS CIUDADES MÁS GRANDES DEL MUNDO

CIUDAD	NÚM. DE HABITANTES (EN MILLONES)	PAÍS	CONTINENTE
Tokio	23.4	Japón	Asia
México	22.9	México	América
Nueva York	21.8	EU	América
Sao Paulo	19.9	Brasil	América
Shangai	17.7	China	Asia
Beijing	15.3	China	Asia
Río de Janeiro	14.7	Brasil	América
Los Ángeles	13.3	EU	América
Bombay	12	India	Asia
Calcuta	11.9	India	Asia
Seúl	11.8	Corea del Sur	Asia
Buenos Aires	11.4	Argentina	América
Yakarta	11.4	Indonesia	Oceanía
París	10.9	Francia	Europa
Osaka-Kobe	10.7	Japón	Asia
El Cairo	10	Egipto	África
Londres	10	Inglaterra	Europa

FUENTE: *Guía Mundial*, 1993.

Es recomendable que los mismos alumnos construyan la tabla y escojan los encabezados adecuados y no que se les proporcione para que sólo la llenen. También se les podrá proponer la actividad inversa, es decir, que extraigan la información relevante de una tabla y escriban un pequeño texto o ensayo para presentarla.

No hay que limitar el uso de las tablas a la presentación de datos obtenidos por observación y medición. También conviene que los alumnos las utilicen para organizar la exploración de casos particulares durante la resolución de problemas. Esto les permitirá examinar las regularidades y patrones que se presenten y avanzar conjeturas, algunas de las cuales podrán demostrarse más adelante, cuando se hayan acostumbrado al razonamiento deductivo.

Por ejemplo

1. El rey de Francia mandó llamar a uno de sus súbditos y le dijo: "Quiero que tú y tu familia arreglen el jardín de mi palacio. ¿Cuánto se tardarán?" Éste contestó: "Como 20 días, mi señor". "Entonces te pagaré 100 monedas de oro". El súbdito, que no era tonto y sí bastante vivo, le respondió: "¡Oh no, mi señor, eso es mucho! Mejor págame una moneda de cobre el primer día, dos el segundo, cuatro el tercero y así hasta terminar. Con eso y con haberos servido me consideraré bien pagado".

Si 100 monedas de cobre representan una de oro, ¿en cuánto le salió el trato al rey?

Para resolver el problema puede construirse la tabla siguiente:

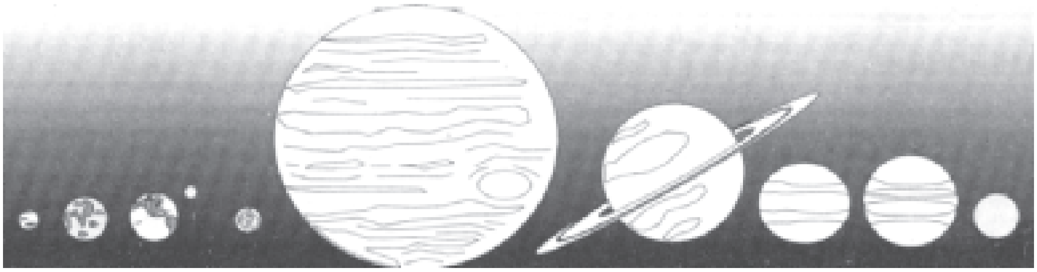
Día	Pago en monedas de cobre	Pago total hasta ese día
1	1	1
2	2	$1 + 2 = 3$
3	$4 = 2^2$	$1 + 2 + 4 = 7$
4	$8 = 2^3$	$1 + 2 + 4 + 8 = 15$
5	$16 = 2^4$	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$
6	$32 = 2^5$	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$

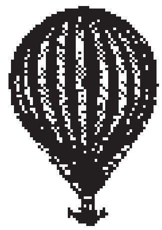
En la tabla se ve que el pago total hasta el primer día es de $2 - 1 = 1$, hasta el segundo de $2^2 - 1 = 3$, hasta el tercero de $2^3 - 1 = 7$ y así sucesivamente. Entonces el pago total por los 20 días será: $2^{20} - 1 = 1\,048\,575$ monedas de cobre. Es decir, ¡más de 10 000 monedas de oro! □

2. Aprovecha la información de esta página para escribir un ensayo.

Satélites naturales y artificiales

Planeta	Satélites
MERCURIO	
VENUS	
LA TIERRA	LUNA
MARTE	FOBOS, DEIMOS
JÚPITER	GANIMEDES, CALISTO, IO, EUROPA, AMALTEA, HIMALIA, ELARA, 1979J2, METIS, ADRASTEA, PASIFAE, CARME, SINOPE, LISITEA, ANANKE, LEDA
SATURNO	TITÁN, REA, JAPET, DIONE, TETIS, ENCELADO, MIMAS, HIPERIÓN, 1980S27, 1980S26, FEBE, 1980S6, 1980S1, 1980S3, 1980S28, 1980S13, 1980S25
URANO	TITANIA, OBERON, UMBRIEL, ARIEL, MIRANDA, 1985U1, 1986U2, 1986U3, 1986U4, 1986U5, 1986U6, 1986U7, 1986U8, 1986U9
NEPTUNO	TRITÓN, NEREIDA
PLUTÓN	CHARON (CARONTE)





*Registro de satélites**

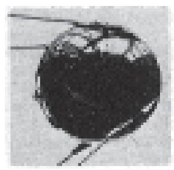
(hasta el 31 de marzo de 1990)

	Aún en órbita	Inoperantes
Agencia Espacial Europea	19	3
Arabia Saudita	2	0
Argentina	1	0
Australia	4	1
Brasil	3	1
Canadá	14	0
Checoslovaquia	0	1
China	8	18
España	1	0
Estados Unidos	560	588
Francia	17	7
Francia/Alemania	2	0
India	8	3
Indonesia	4	1
Israel	0	1
Italia	1	5
Japón	43	7
Luxemburgo	1	0
México	2	0
Organización Europea de Investigación Espacial	0	7
Organización Internacional de Satélites de Comunicaciones	38	1
OTAN	6	0
Países Bajos	0	1
Reino Unido	13	7
Alemania	8	4
Suecia	2	0
URSS	1.132	1.464
Total	1.889	2.119

FUENTE: NASA.

*Excluye desperdicios en órbita.

Primer satélite artificial de la Tierra. *Nombre:* Sputnik 1. *Peso:* 84 kg. *País:* URSS. *Lanzamiento:* 4 octubre 1957. *Lugar:* Cosmódromo de Baikonur (Kazajstán). *Cohete impulsor:* No revelado; posiblemente un T- 3 (3 etapas). *Apogeo:* 940 km. *Perigeo:* 231 km. Destruido el 4 de enero de 1958.



Primer vuelo orbital tripulado (cosmonauta Yuri Gagarin). *Nave:* Vostok 1. *País:* URSS. *Peso:* 4.726 kg. *Lanz.:* 12 abril 1961. *Lugar:* Baikonur. *Cohete impulsor:* De varias etapas. *Apogeo:* 327 km. *Perigeo:* 180 km. *Núm. de órbitas:* 1. La cápsula descendió en paracaídas a unos 640 km al SE de Moscú.

Primeros hombres en la Luna (Neil Armstrong y Edwin Aldrin; Michael Collins se mantuvo en órbita). *Nave:* Apolo 11. *País:* EU. *Peso:* 43.862 kg. *Lanz.:* 16 julio 1969. *Lugar:* Cabo Cañaveral. *Cohete imp.:* Saturn 5 (3 et.). *Núm. de órbitas lunares:* 31. *Alunizaje:* 20 julio 1969. *Permanencia en suelo lunar:* 22 h, 22 min.

FUENTE: *Almanaque Mundial, 1982 y 1991.*

3. Un cubo de madera de dimensiones $3 \times 3 \times 3$ fue pintado de rojo y luego dividido en 27 cubos pequeños de dimensiones $1 \times 1 \times 1$ (figura 1):

a) ¿Cuántos cubos pequeños no tienen ninguna cara pintada? ¿Sólo una cara pintada? ¿Dos caras pintadas? ¿Tres caras pintadas? ¿Cuatro o más caras pintadas?

b) Resolver el mismo problema que en el inciso *a* pero considerando cubos de dimensiones $4 \times 4 \times 4$ y $5 \times 5 \times 5$ (figuras 2 y 3).

c) Resolver el mismo problema que en los incisos *a* y *b* pero considerando en general un cubo de dimensiones $n \times n \times n$.

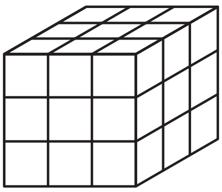


Figura 1

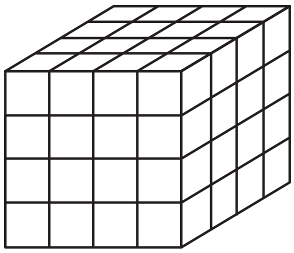


Figura 2

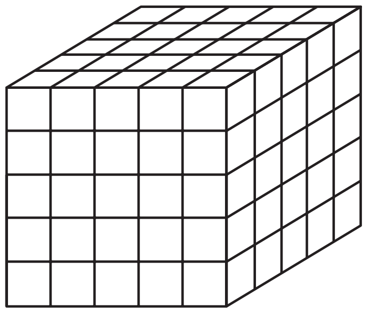


Figura 3

Se puede construir una tabla como la siguiente:

DIMENSIONES DEL CUBO	CARAS PINTADAS:				
	0 CARAS	1 CARA	2 CARAS	3 CARAS	4 O MÁS CARAS
$3 \times 3 \times 3$	1	6	12	8	0
$4 \times 4 \times 4$	8	24	24	8	0
$5 \times 5 \times 5$	27	54	36	8	0
$6 \times 6 \times 6$					
$7 \times 7 \times 7$					
$8 \times 8 \times 8$					
$n \times n \times n$					

Al llenar la tabla y buscar la regla que siguen los números en cada columna, se ve que para el cubo de dimensiones $n \times n \times n$ se obtienen:

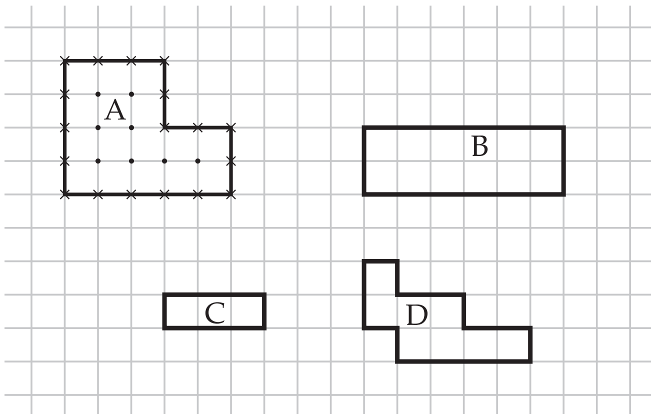
$(n-2)^3$ cubitos sin ninguna cara pintada

$6(n-2)^2$ cubitos con sólo una cara pintada

$12(n-2)$ cubitos con dos caras pintadas

8 cubitos con tres caras pintadas (las esquinas del cubo grande)

4. A la derecha aparecen algunos polígonos dibujados sobre papel cuadriculado. Observa que los lados de los polígonos caen sobre las líneas que forman el cuadriculado.



a) Dibuja una tabla como la siguiente y llénala como lo muestra el ejemplo, contando lo que se pide en cada columna. Para facilitar el conteo marca con rojo (o con una cruz) los puntos en la frontera y con negro los puntos en el interior.

Polígono	Área	Núm. de puntos interiores	Núm. de puntos en la frontera
A	16	8	18
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			
I			
J			
K			

b) Dibuja otros seis polígonos que también tengan sus lados sobre las líneas de la cuadrícula y llena las líneas E, F, G, H, I, J y K de la tabla.

c) Trata de encontrar la fórmula (llamada fórmula de Pick), que relaciona los tres números de un mismo renglón de la tabla. (*Sugerencia:* dibuja primero varios polígonos que tengan la misma área; luego dibuja varios polígonos que tengan el mismo número de puntos interiores.)

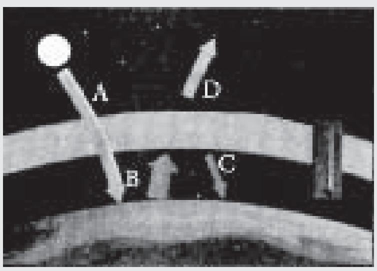
5. Los conejos se reproducen rápidamente. Suponiendo que una pareja de conejos adultos produce otra pareja de conejos jóvenes cada mes y que una pareja de conejos recién nacidos se vuelve adulta en dos meses y produce, a su vez, otra pareja de conejos, ¿cuántas parejas de conejos habrá al cabo de 1, 2, 3, ... *n* meses si se comenzó con una pareja de conejos adultos? (*Sugerencia*: construye una tabla donde aparezcan: el número de parejas adultas, el de parejas jóvenes y la suma del número de parejas adultas más el de parejas jóvenes.) □

Gráficas de uso frecuente

A lo largo de las actividades en clase, los alumnos deberán tener oportunidad de conocer y familiarizarse con las gráficas de uso común en las revistas, los periódicos y otros medios de información y comunicación. Éstas son, entre otras:

Gráficas de barras, utilizadas comúnmente para presentar las frecuencias absolutas y relativas con que se manifiestan ciertos hechos o acontecimientos.

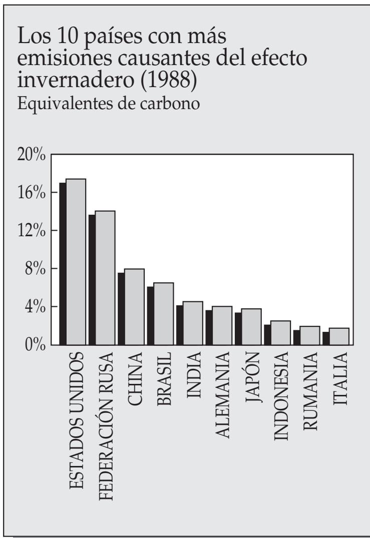
Efecto invernadero



La radiación solar es absorbida por la Tierra (A), pero 30% se refleja (B) y es captado por el CO_2, el metano y otros gases emitidos desde la superficie, que la reenvían a ésta (C). Aunque la radiación saliente (D) mantiene el equilibrio, el ciclo (B) y (C) eleva la temperatura en las zonas bajas de la atmósfera terrestre.

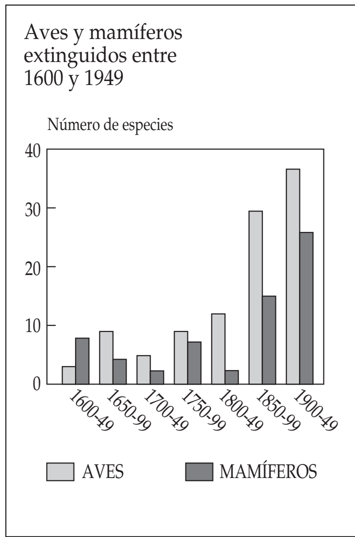
Fuente: *Almanaque Mundial*, 1993.

1



Fuente: *World Resources Institute*, 1991.

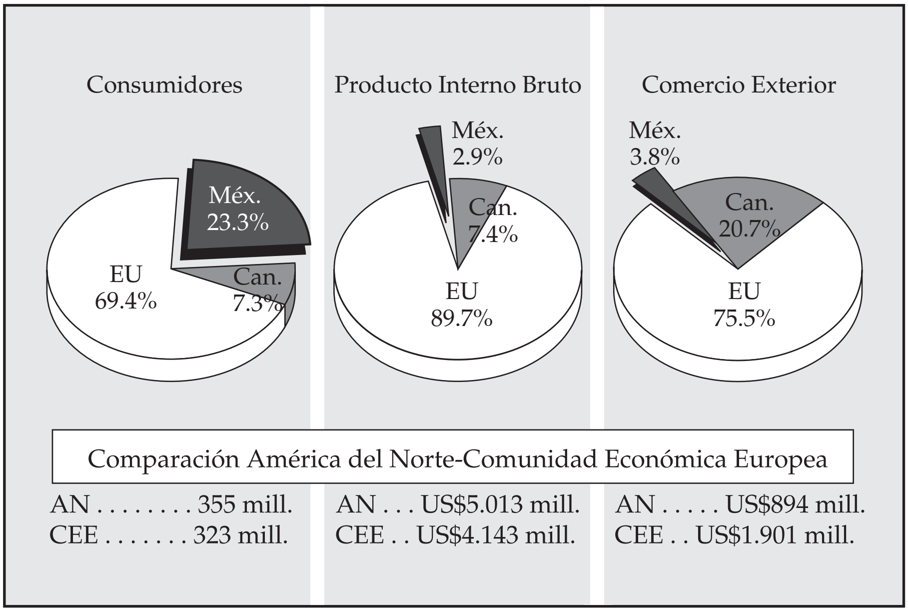
2



Fuente: *World Resources Institute*, 1989.

Gráficas de sectores o circulares, que permiten mostrar y comparar los tamaños relativos de las partes que componen un todo.

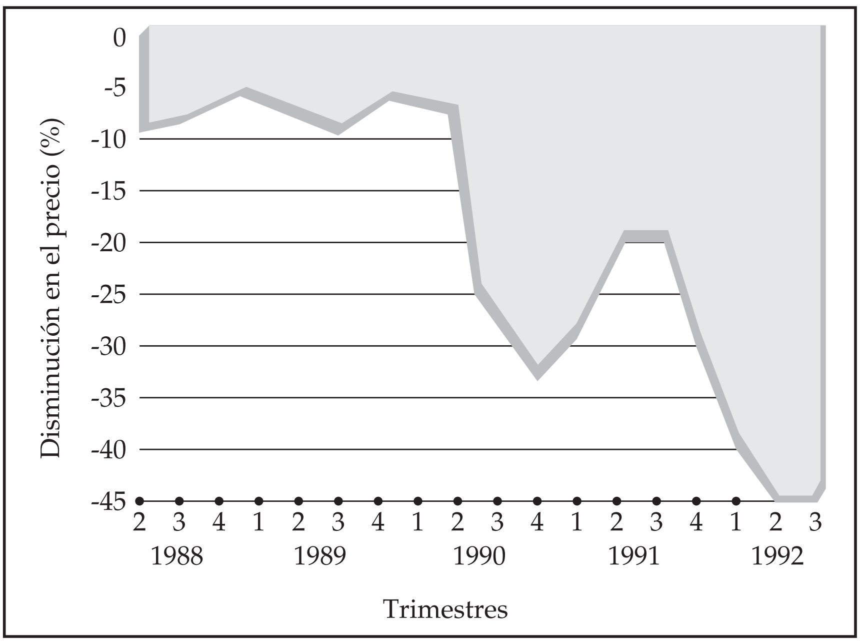
MÉXICO EN EL MERCADO DE AMÉRICA DEL NORTE



FUENTE: Banco Mundial, 1988.

Gráficas de datos que varían con el tiempo, como pueden ser la población, los precios, los cambios de temperatura, de la precipitación pluvial y de los índices de contaminación a lo largo de un periodo, etcétera.

VARIACIÓN EN EL PRECIO DE MICROCOMPUTADORAS



FUENTE: *La Recherche.*

También deberá propiciarse que los alumnos se acostumbren a los diferentes tipos de datos que pueden presentarse: nominales, ordinales, medidos en una escala continua, etcétera, y reconozcan el tipo de tratamiento en tablas o gráficos que conviene en cada caso. No obstante, el acercamiento a estos temas deberá ser informal e intuitivo, por medio de diversas actividades y problemas, y sin intentar avanzar hacia explicaciones que serían difíciles de comprender en la secundaria.

Tablas y gráficas son mutuamente complementarias. Mientras que en las tablas el énfasis está puesto sobre todo en los aspectos cuantitativos de la información, las gráficas ayudan a visualizar la estructura de los datos y los hechos más importantes. Dicho lo anterior, conviene agregar que ni la lectura de una tabla ni el darse cuenta de los fenómenos revelados por una gráfica son habilidades que se desarrollen totalmente de manera espontánea, sino que deberán ser aprendidos a partir de diversas actividades.

En particular, deben plantearse situaciones que propicien que los alumnos comprendan las ventajas de utilizar una u otra forma de presentación, o de combinarlas.

Por ejemplo

En la siguiente tabla están dados los datos de población para la República Mexicana, según los censos realizados a partir de 1900. Se han agregado dos columnas donde aparecen los incrementos y las tasas de crecimiento (incrementos relativos) de la población de un censo a otro. Los incrementos son siempre positivos, salvo para el periodo 1910-1921 (¿por qué?).

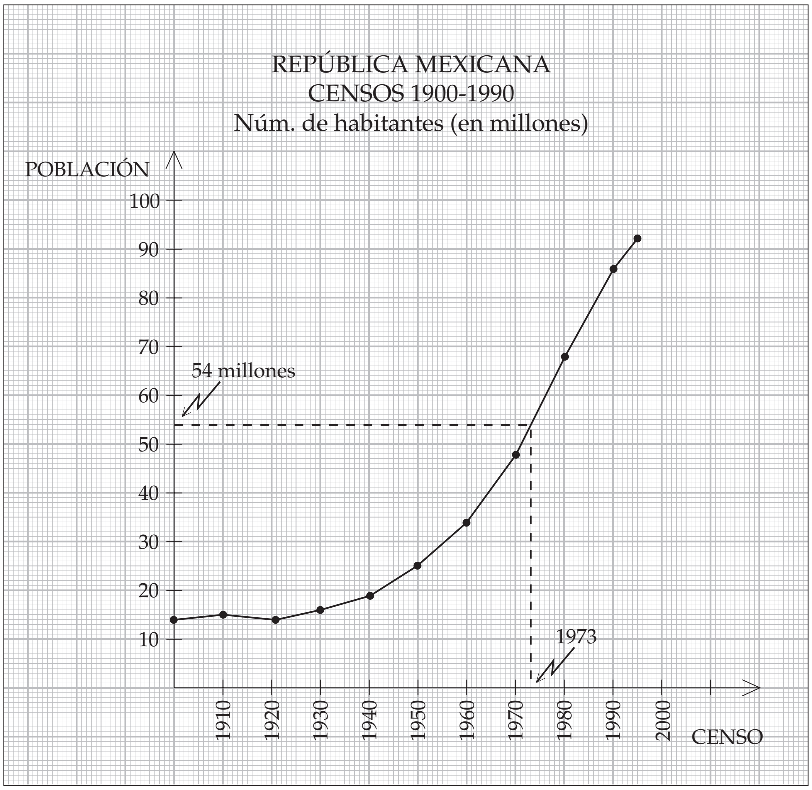
Población de la República Mexicana 1900-1997

Censo	Población (Millones de hab.)	Incremento	%
1900	13.6		
1910	15.2	1.6	11.8
1921*	14.3	– 0.9	–5.9
1930	16.5	2.2	15.5
1940	19.7	3.2	19.4
1950	25.8	6.1	30.5
1960	34.9	9.1	35.3
1970	48.2	13.3	38.1
1980	67.4	19.2	39.8
1990*	86.2	18.8	27.8
1995	91.2	5.0	5.8
1997	94.3	3.1	3.3

Fuente: El Colegio de México.

* inegi.

Cuando se trata de datos que varían continuamente con el tiempo, como los de la tabla anterior, conviene presentarlos en una gráfica poligonal como la que viene a continuación. Este tipo de gráficas son útiles para estimar valores intermedios que no aparecen en la tabla. Por ejemplo, en la gráfica se lee que en 1973 la población fue de aproximadamente 54 millones de habitantes. Este resultado también puede calcularse a partir de los valores de la tabla, pero requiere que se aplique el procedimiento de interpolación lineal.



También puede estarse interesado en utilizar los datos de la tabla para hacer proyecciones a futuro. Por ejemplo, en la columna de porcentajes se ve que la tasa de crecimiento alcanzó su máximo en el periodo 1970-1980, cuando llegó hasta cerca de 40%, luego descendió (¿por qué?). Uno puede entonces preguntarse cuál será la población en los años 2010, 2020, ... si se mantiene la tasa de crecimiento de 1.8%. □

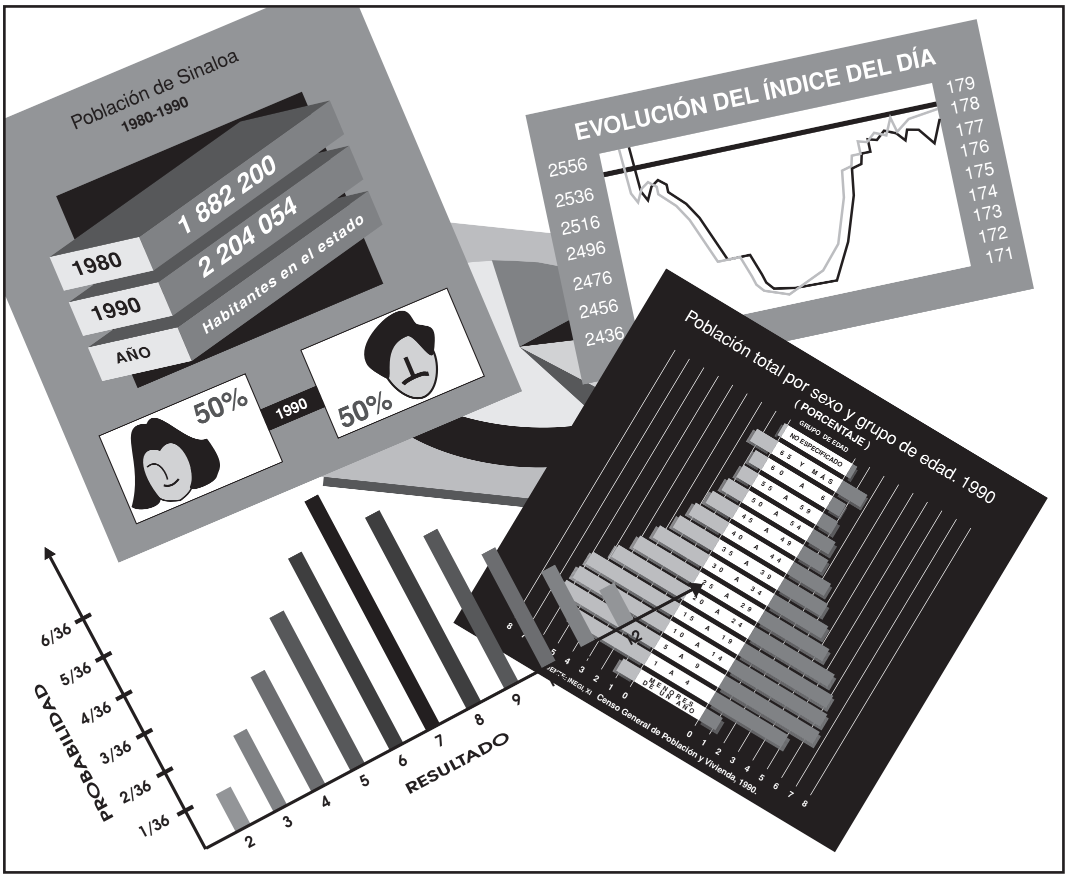
Es recomendable que la elaboración de tablas y gráficas no se traduzca en la aplicación de recetas, ni en prácticas rutinarias que sólo lograrían aburrir a los alumnos. El profesor podrá buscar en los periódicos y revistas de su localidad, así como en textos y libros, situaciones que resulten interesantes para los alumnos. Conviene aprovechar el sentido crítico —y en ocasiones hipercrítico— de los adolescentes para que descubran ellos mismos la importancia que tienen aspectos como escoger adecuadamente los títulos de una tabla y una gráfica; indicar con claridad los encabezados en las columnas de una tabla y las variables en una gráfica;

poner cuidado en la elección de las unidades y las escalas y, para citar un último ejemplo, identificar las fuentes que dan confiabilidad a los datos.

Una buena actividad será recopilar tablas y gráficas de periódicos y revistas con el fin de apreciar si resultan claras y fáciles de leer. En caso contrario, podrán sugerir o elaborar mejores versiones. Se verá entonces que las recomendaciones usuales para mejorar la presentación de la información aparecen como soluciones del sentido común.

Finalmente, se está tan acostumbrado a las tablas y gráficas utilizadas para presentar listas de datos o relaciones cuantitativas entre dos cantidades, que con frecuencia se dejan fuera de este estudio otras formas usuales de presentación y tratamiento gráfico de la información, como son los cuadros sinópticos, los organigramas, los diagramas de flujo y los árboles, en particular los árboles de clasificación jerárquica y, en general, todo tipo de diagramas, incluidos los diagramas de Venn y de Carroll.

De algunas de estas formas de tratamiento de la información ya se han presentado algunas actividades. Para las otras se presentarán algunas situaciones en las páginas siguientes y a todo lo largo de este capítulo.



Principales datos de población de la República Mexicana

1. Población total en México: 1997

SUPERFICIE:	1 958 201 km^2	
HABITANTES:	94 300 000 (1997)	
DENSIDAD:	75 hbs/km^2 (1997)	
TASA DE CRECIMIENTO POBLACIONAL:	1.8% (1995-2000)	
PROYECCIONES:		
	AÑO	POBLACIÓN
	2020	136 710 000
	2025	142 000 000

FUENTE: INEGI.

2. Población rural y urbana en México: 1960-1990

AÑO	POBLACIÓN TOTAL	RURAL	%	URBANA	%
1960	34 923 129	17 218 011	49.3	17 705 118	50.7
1970	48 225 238	19 916 682	41.3	28 308 556	58.7
1980	66 846 833	22 547 104	33.7	44 299 729	66.3
1990	81 249 645	23 289 924	28.7	57 959 721	71.3

Se toma como rurales aquellas localidades con menos de 2 500 habitantes.

FUENTE: INEGI.

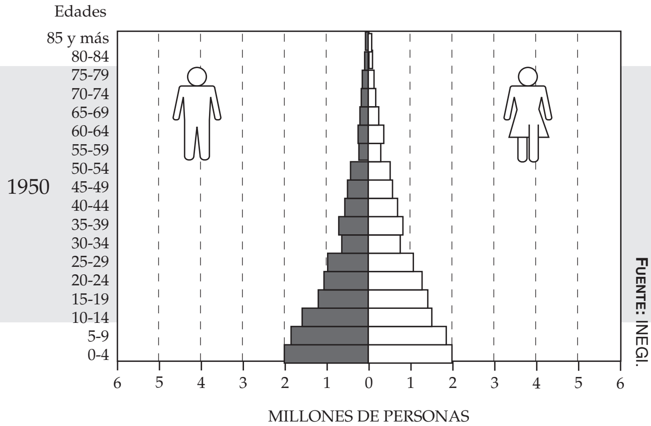
3. Población total por grupos de edad: 1970, 1980, 1990, 1995

GRUPOS DE EDAD	1970 POBLACIÓN	%	1980 POBLACIÓN	%	1990 POBLACIÓN	%	1995 POBLACIÓN	%
Total	48 225 238	100.0	66 846 833	100.0	81 249 645*	100.0	91,158,290*	100.0
0 - 14 años	22 286 680	46.2	28 726 174	43.0	31 146 504	38.3	32,261,711	35.4
15 - 64 años	24 147 173	50.1	35 366 290	52.9	46 234 035	56.9	54,654,036	60.0
65 y más años	1 791 385	3.7	2 561 120	3.8	3 376 841	4.2	4,242,543	4.6

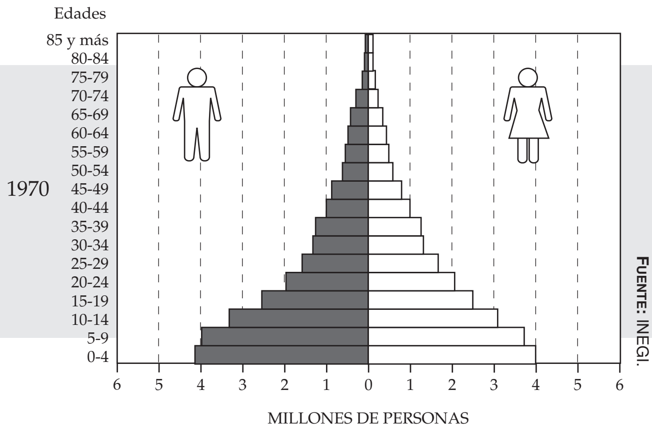
La suma de porcentajes puede no coincidir por rubro "no especificado".
*Esta población no coincide con la arriba registrada porque la fuente es diferente.

FUENTE: INEGI.

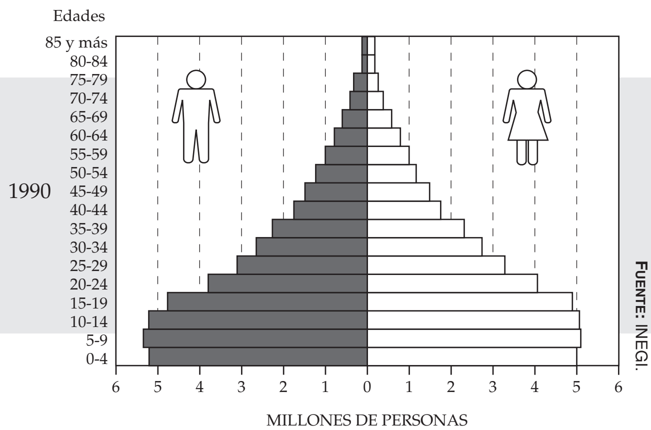
4. Pirámides de población



5.

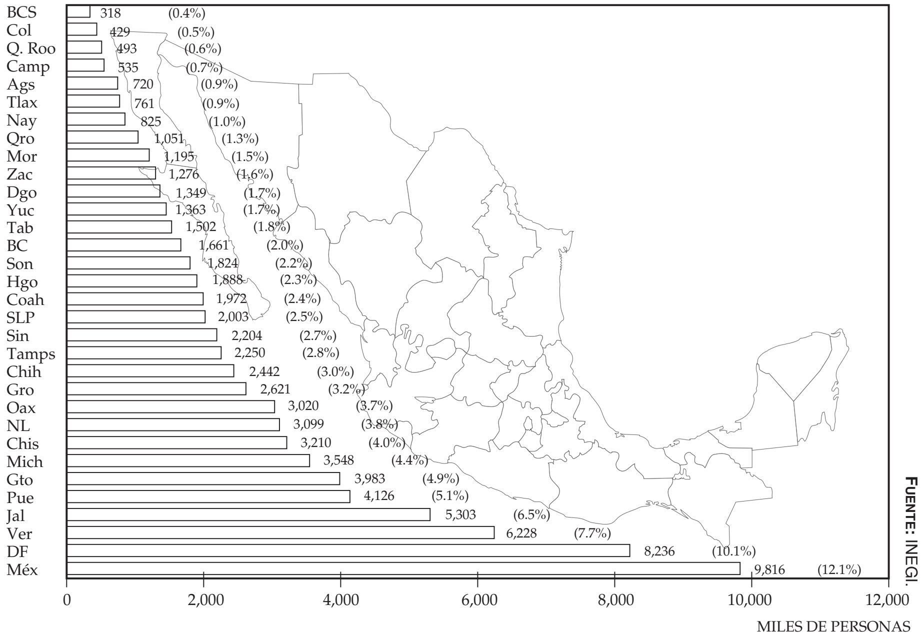


6.



7.

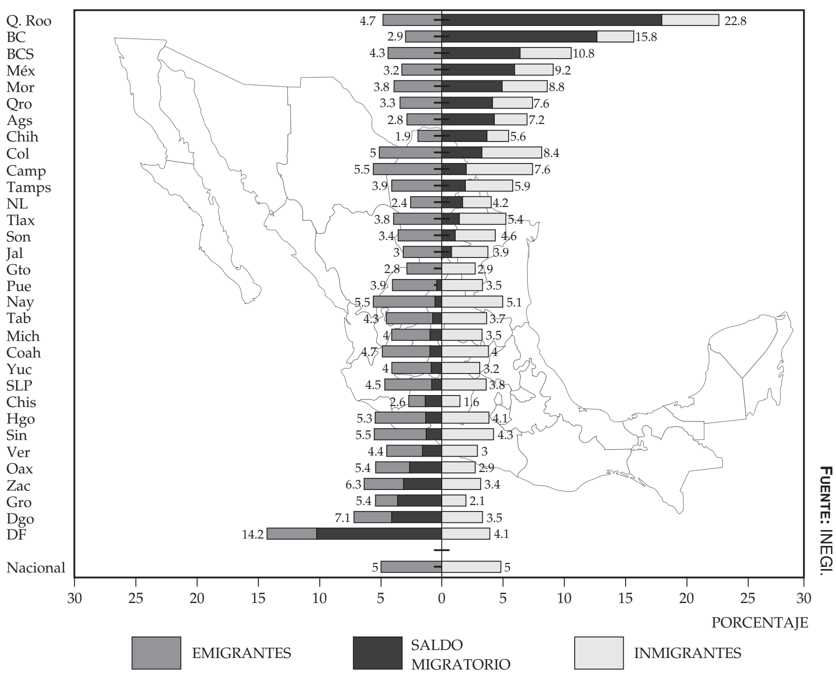
POBLACIÓN POR ENTIDAD FEDERATIVA, 1990
(MILES DE PERSONAS)



( ) El dato entre paréntesis es el porcentaje que representa la población de la entidad en el total nacional.

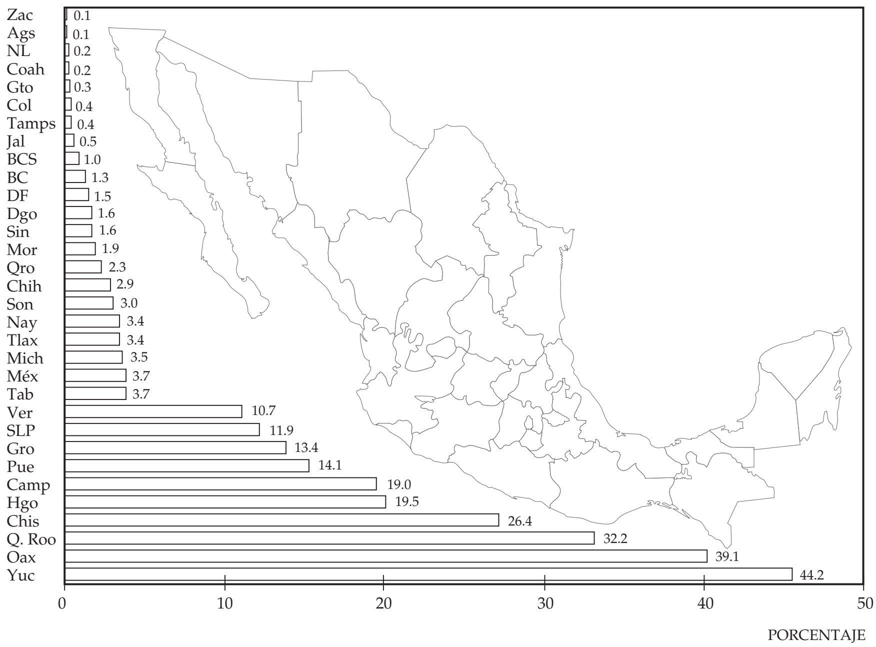
8.

MIGRACIÓN INTERESTATAL EN LOS ÚLTIMOS 5 AÑOS: 1985-1990
PROPORCIÓN DE LA POBLACIÓN MIGRANTE
(POBLACIÓN DE 5 AÑOS Y MÁS)



9.

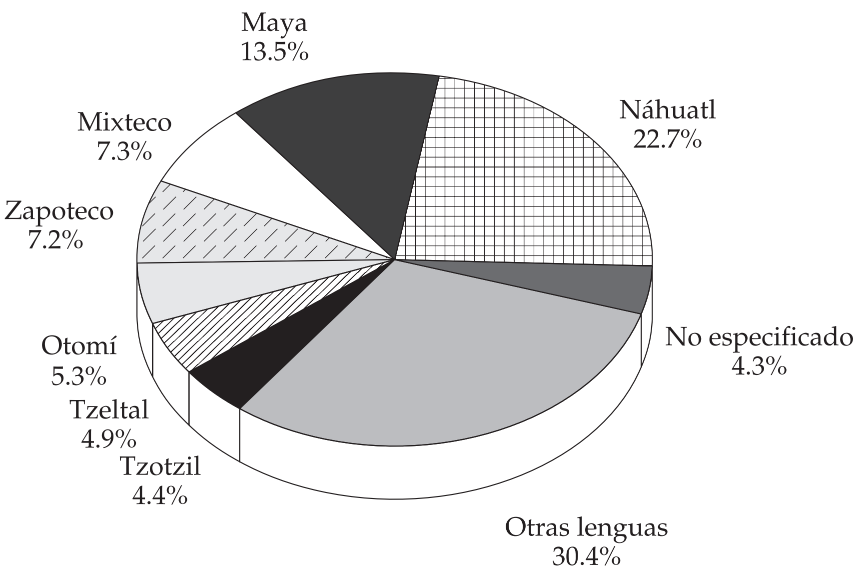
PORCENTAJE DE POBLACIÓN QUE HABLA LENGUA INDÍGENA, 1990
(POBLACIÓN DE 5 AÑOS Y MÁS)



FUENTE: INEGI.

10.

DISTRIBUCIÓN DE LA POBLACIÓN
SEGÚN LENGUA INDÍGENA, 1990
(POBLACIÓN DE 5 AÑOS Y MÁS)



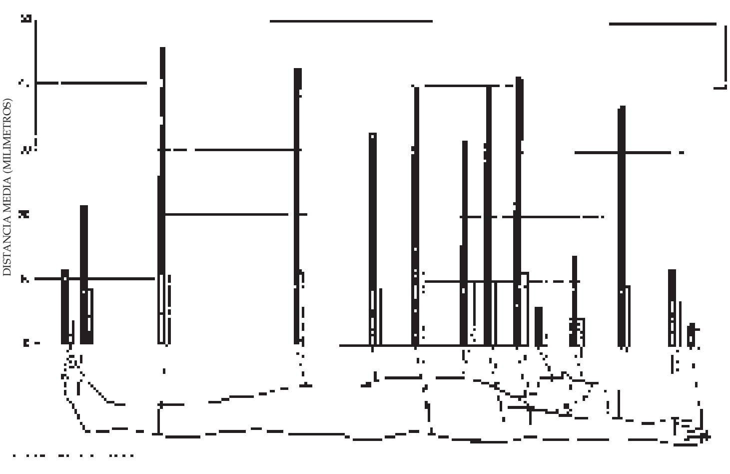
FUENTE: INEGI.

11. Otros ejemplos de tratamiento de la información en tablas y gráficas

La gran variedad de medidas humanas			
Medida	**Normal**	**Máximo**	**Mínimo**
ESTATURA	Hombres: 1.30 – 2 m Mujeres: 1.20 – 1.87 m (varía con los grupos étnicos y regionales).	El hombre más alto que se conoce, víctima del gigantismo pituitario, fue Robert Wadlow, de Illinois, que medía 2.72 m.	La persona más baja que se conoce fue Pauline Musters, de 59 cm. Nació en 1876 y murió de pulmonía a los 19 años.
PESO	Hombres: 50 – 92.5 kg Mujeres: 42 – 78.5 kg (EU)	Robert Hughes, de Illinois, pesaba 485 kg poco antes de morir en 1958.	Lucía Zárate de México, pesaba 2.11 kg a los 17 años. A los 20 pesaba 5.85 kg.
NÚMERO DE PELOS EN LA CABEZA	120 000 (promedio)	Las rubias naturales pueden tener hasta 140 000.	El mínimo (excluyendo a los calvos) suele ocurrir entre los pelirrojos naturales, que pueden tener tan sólo 90 000.
TEMPERATURA DEL CUERPO	36.1 – 37.2ºC	A los 43ºC ocurren hemorragias mortales y las células se degeneran y mueren. Es en extremo raro recuperarse de temperaturas mayores de 43ºC.	A los 26.4ºC falla el corazón. Una excepción rara fue una chica que se recuperó de los 16ºC.
LATIDOS DEL CORAZÓN POR MINUTO	60 – 85 (en reposo)	En los jóvenes, durante ejercicios fuertes, el corazón puede latir hasta 280 veces por minuto.	50-60 (durante el sueño)
TENSIÓN SANGUÍNEA	120/80 mm (a los 20 años)	Una persona con hipertensión aguda puede tener una tensión hasta de 300/150 mm: 300 mm cuando el corazón se contrae y 150 mm cuando se relaja.	Poco después de nacer, la tensión puede ser de 74/38.
SUEÑO DIARIO NECESARIO	7 – 9 horas (adultos)	Los niños recién nacidos necesitan de 18 a 20 horas diarias.	Los ancianos pueden pasarla con sólo 5 horas diarias.
PESO AL NACER	3.3 kg (promedio)	El bebé más grande que se conoce pesaba 10.811 kg y nació en Turquía.	El bebé más pequeño que se conoce fue una niña de 280 g que nació en Estados Unidos en 1938.
PARTOS POR MUJER (edades de 15 a 44 años)	2.4 (promedio)	Una campesina rusa dio a luz 69 hijos: 16 pares de mellizos, siete veces trillizos y cuatro veces parto cuádruple.	
EDAD DE TENER HIJOS	25.4 (promedio EU)	En 1956 una mujer de Oregon tuvo un hijo a los 57 años.	En 1939 dio a luz una india peruana de 5 años de edad.

FUENTE: *El cuerpo humano.*

12.



Error normal asociado al tacto expresable de dos maneras: a través de la separación mínima media necesaria para que dos impactos se sientan como un par de contactos discretos cuando presionan simultáneamente la piel *(líneas oscuras)* y a través de la separación media entre el punto de contacto percibido y el punto en el que realmente el percutor tocó la piel *(líneas claras)*. La precisión del sentido del tacto varía mucho de una zona del cuerpo a otra.

13.

Algunas diferencias entre los dos sexos		
Medida	**Mujeres**	**Hombres**
Peso del cerebro		
Pequeño	1 060 g	1 100 g
Mediano	1 275 g	1 400 g
Grande	1 550 g	1 700 g
Peso del corazón	255 g	312 g
Cantidad de sangre	3.8 a 4.75 litros	4.64 a 5.7 litros
Superficie de la piel	1.61 m^2	1.86 m^2
Agua: % peso del cuerpo	54%	60%
Músculo: % peso del cuerpo	36%	42%
Grasa: % peso del cuerpo	28%	18%
Hueso: % peso del cuerpo	18%	18%
Longitud media de la columna vertebral	61 cm	71 cm
Capacidad pulmonar total a los 25 años		
Pequeño	3.1 l	4.3 l
Mediano	4.2 l	7.4 l
Grande	5.4 l	8.9 l
Número de respiraciones por minuto (en reposo) aire aspirado por cada respiración	20 – 22	14-18
En reposo	0.34 l	0.75 l
Trabajo ligero	0.86 l	1.68 l
Trabajo pesado	0.88 l	2.03 l
Máxima inspiración posible (capacidad vital) a los 25 años	2.99 l	4.90 l
Número de glóbulos rojos por milímetro cúbico promedio de los EU.	4 200 000 – 5 400 000	4 600 000 – 6 200 000

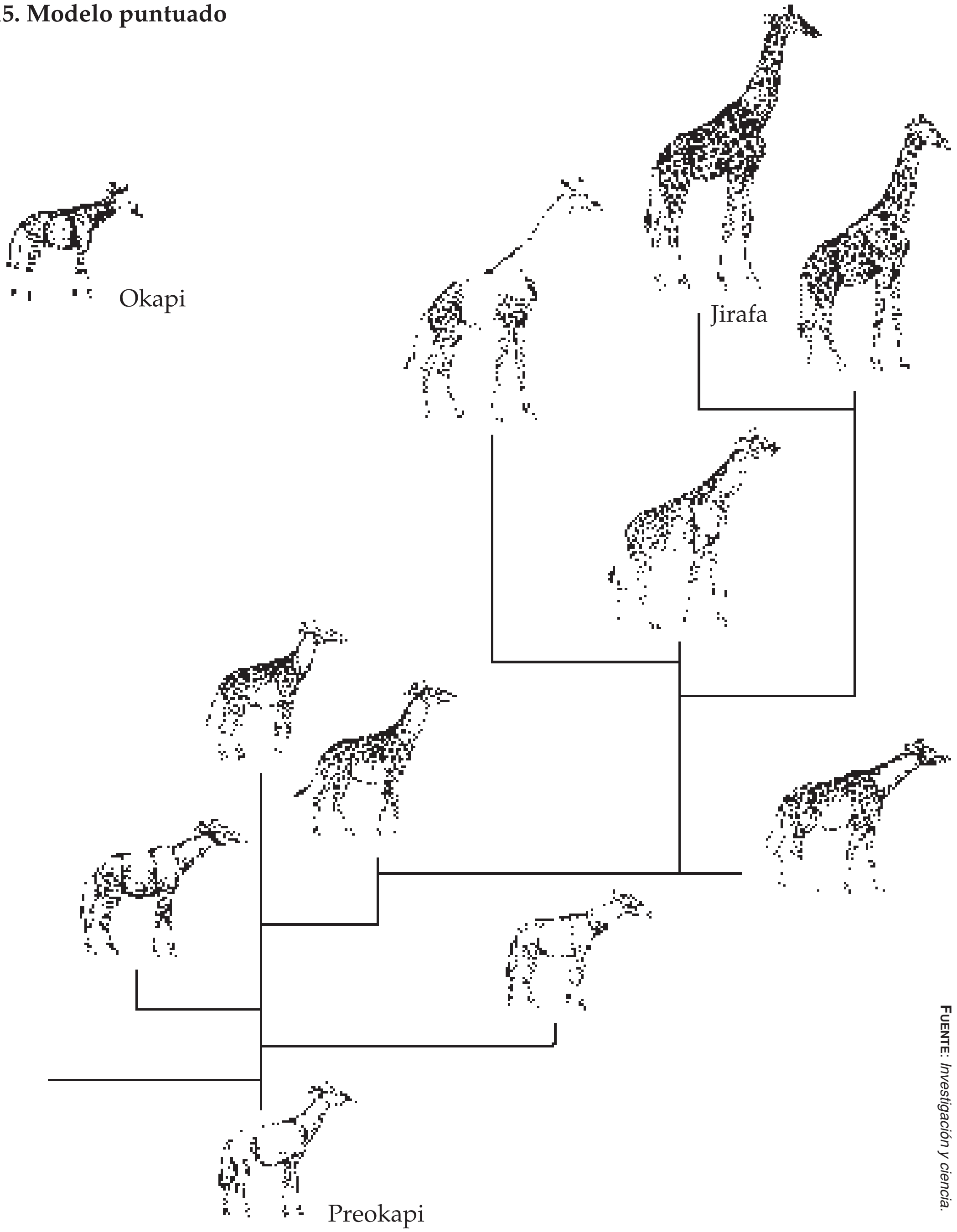
Fuente: *El cuerpo humano.*

14.

El cuerpo humano Porcentaje de agua en tejidos	
Grasa	20
Sangre	80
Hueso	25
Conjuntivo	60
Riñón	80
Hígado	70
Músculo (estriado)	75
Piel	70
Tejido nervioso	65
Materia gris	85
Materia blanca	70

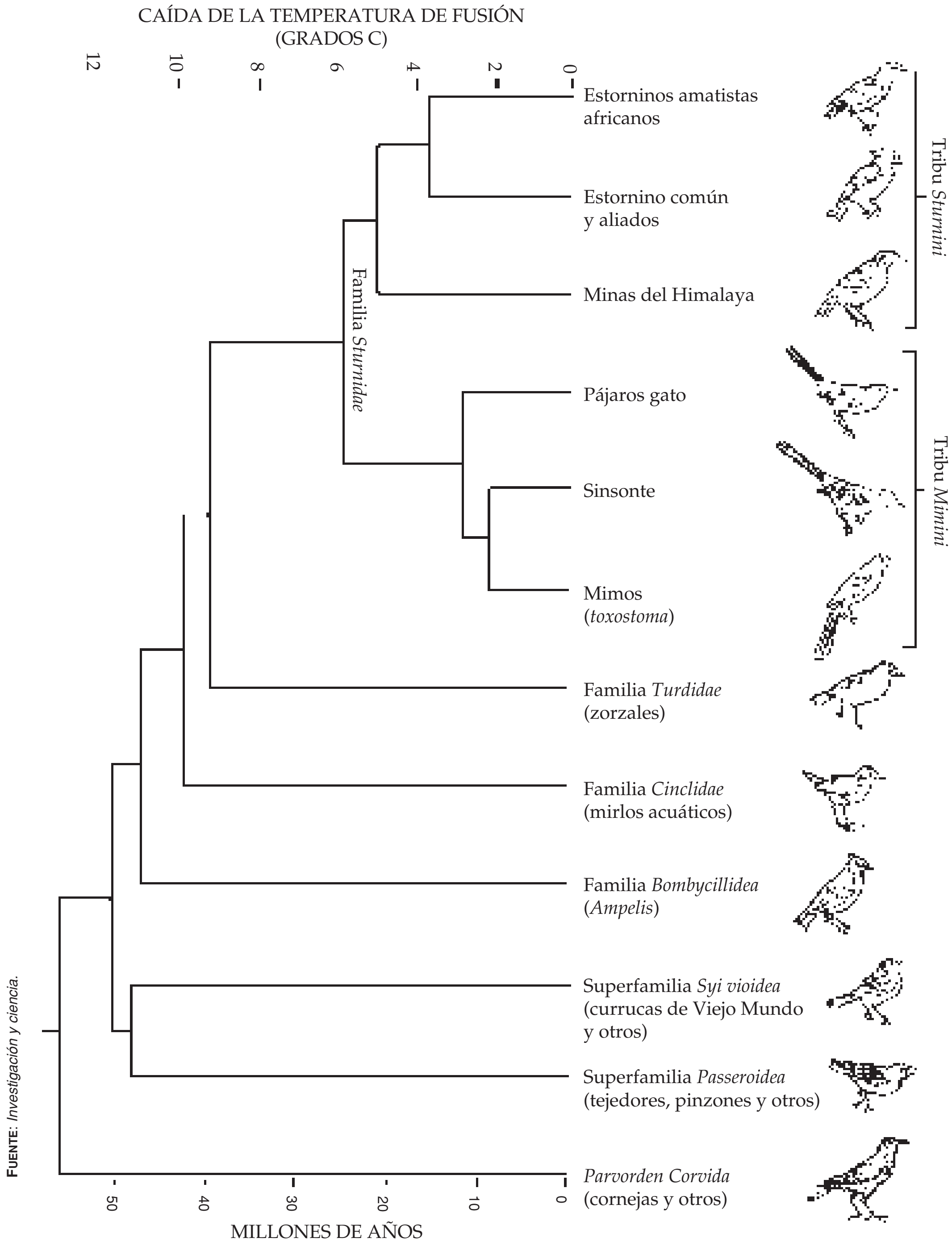
El agua del cuerpo humano. Si fuera posible sacar toda el agua de un hombre de 72 kg de peso, su cuerpo deshidratado no pesaría más de 29 kg. Este cuadro indica dónde se distribuye la mayor parte del agua del cuerpo. No hay más agua en la sangre que en muchos de los tejidos llamados “sólidos”. Los aficionados a los baños turcos se apesadumbrarán al saber que hay menos agua en la grasa que en cualquier otro tejido, inclusive el hueso. Los que tienen más agua son las propias células. (*Ejercicio*: presentar gráficamente la información contenida en la tabla.)

15. Modelo puntuado



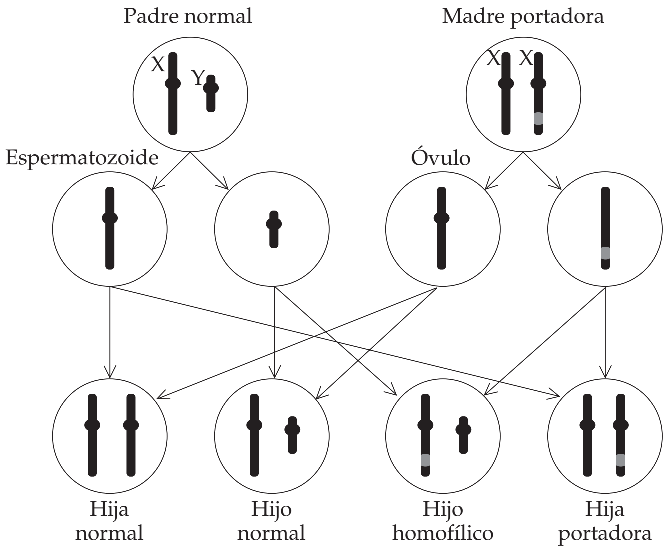
Un modelo evolutivo. Nos proporciona un escenario de la representación de la divergencia entre el okapi y la jirafa a partir de un antepasado común. En el modelo del equilibrio puntuado de la ilustración el cambio morfológico ocurre de manera súbita y viene acompañado por la aparición de especies nuevas, aisladas a efectos reproductores. Así, la ruta evolutiva que va del preokapi ancestral a la actual jirafa se bifurca repetidas veces en poblaciones pequeñas y aisladas que evolucionan rápidamente a especies diferenciadas, constituyendo cada una de ellas una variante morfológica nueva. En este supuesto, el okapi se desarrolló a partir de la especie ancestral de una forma similar, aunque más directa. Un salto más ocurrido en una población aislada originó el desarrollo de la morfología propia del okapi y, a continuación, éste no experimentó más cambios.

16.



Estorninos y mimos ocupan ramas contiguas del árbol filogenético aviario, según los datos de la hibridación de ADN-ADN. Se ha considerado a los estorninos (tribu *Sturnini*) parientes de las cornejas y a los mimos se les ha colocado cerca de los zorzales. Si esta clasificación fuera correcta, los ancestros de los mimos y los estorninos se habrían separado hace casi 60 millones de años. Los datos sobre puntos de fusión de híbridos señalaban, en cambio, que los estorninos y los mimos son parientes muy próximos, que se separaron hace unos 25 millones de años. Ambos grupos están emparentados con los zorzales.

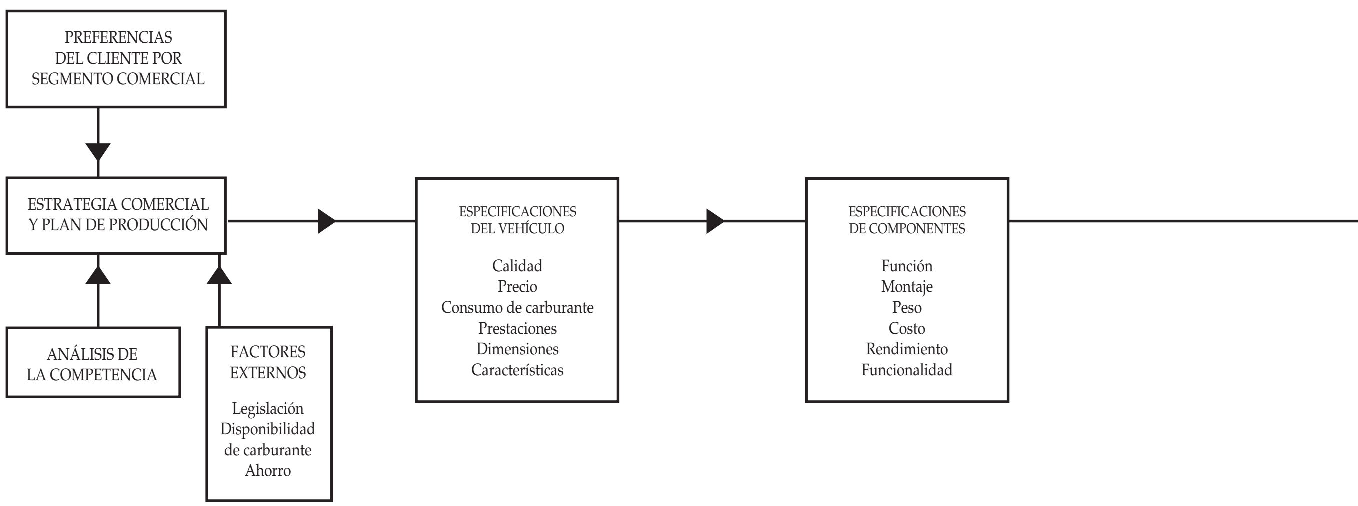
17. Modelo puntuado



FUENTE: *Investigación y ciencia.*

Herencia de la hemofilia, que está ligada al sexo porque el gen del factor VII se halla en el cromosoma X. Un varón portador de un gen del factor VII que haya mutado carece de factor VIII normal: es, por tanto, hemofílico. Una hembra portadora no sufre la enfermedad, pues el gen normal de su segundo cromosoma X la protege; la mitad de sus hijas serán portadoras y la mitad de sus hijos hemofílicos. En el caso de que el padre fuese hemofílico y la madre normal (no contemplado en el esquema), los hijos varones no serían hemofílicos, puesto que reciben del padre el cromosoma Y, pero todas las hijas serían portadoras.

18.



FUENTE: *Investigación y ciencia.*

Diseño de un automóvil: un proceso jerárquico que descansa cada vez más en métodos de proyectos asistidos por computadora, o CAD, análisis de ingeniería y simulación, o CAE, y análisis de fabricación o CAM. El proceso se inicia con una estrategia comercial general y un plan de producción que define el tipo de vehículo y sus especificaciones generales: calidad, precio, tamaño, peso y rendimiento, entre otros. Durante esta fase se realizan simulaciones por computadora para asegurar que diversas características técnicas del vehículo (potencia del motor y consumo de carburante, entre ellas) resulten tal y como estaban programadas. A continuación, se diseñan los componentes individuales; en esta fase las especificaciones generales sirven de directrices. La forma de un componente queda

19.

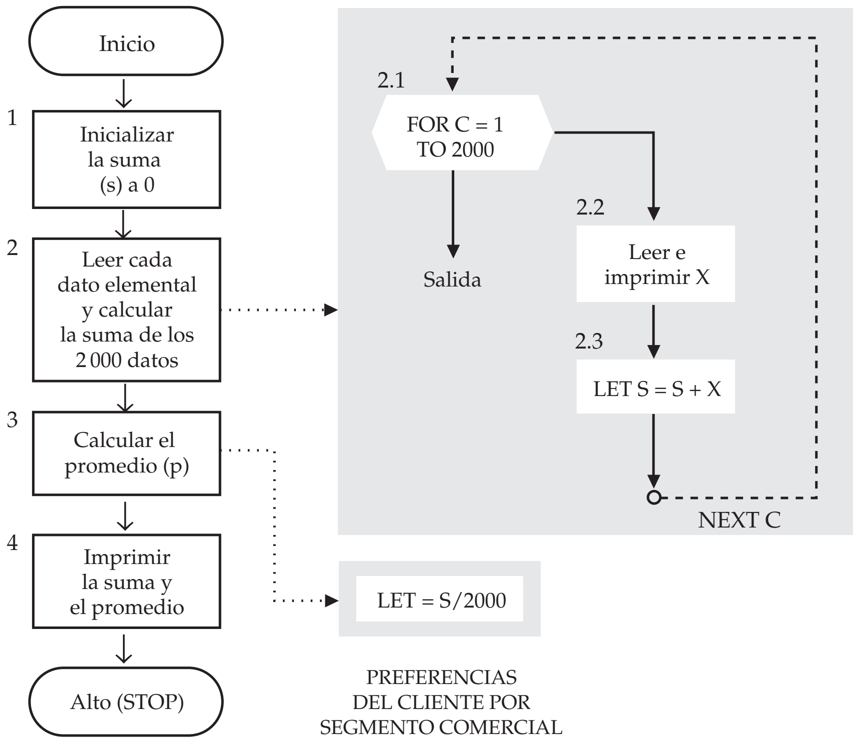
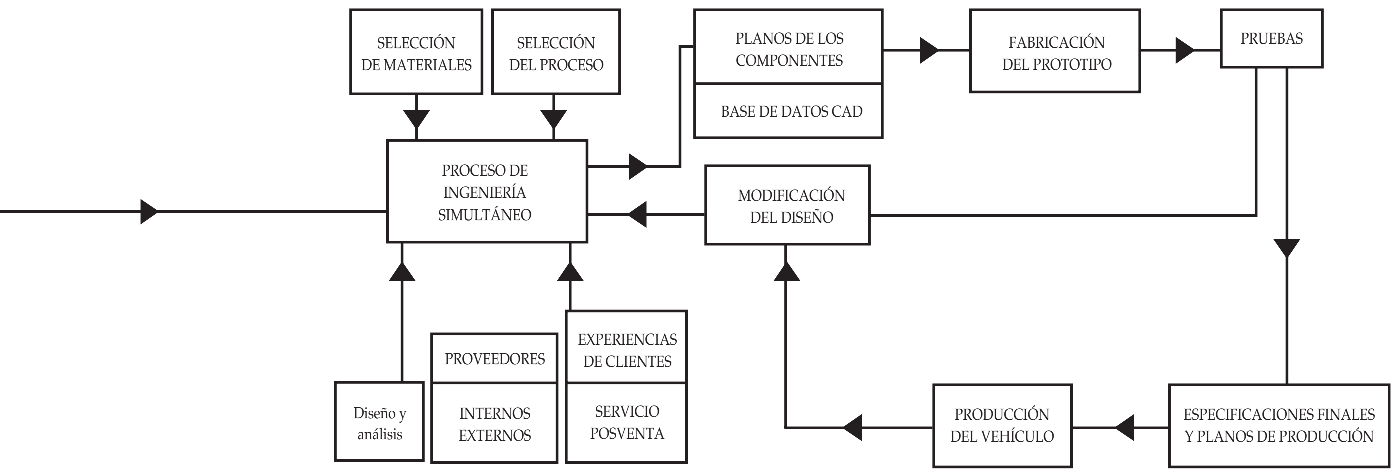


Diagrama de flujo. El problema consiste en sumar 2 000 datos y obtener su promedio dividiendo la suma entre el número de datos.



determinada por la consideración simultánea de varios factores: función de la pieza, material de que será fabricada y limitaciones impuestas por el proceso fabril, entre otros. Otras consideraciones comprenden el montaje (forma en que una pieza encaja con otras), peso y costo. En el pasado no era posible saber con certeza cómo funcionaba una pieza hasta que no se fabricaba. Las técnicas basadas en la computadora permiten ahora, en muchos casos, pronosticar el rendimiento antes de la fabricación. Las limitaciones o restricciones en fabricación, que antiguamente se sopesaban durante las últimas fases del proceso de diseño, constituyen hoy día una porción sustantiva del estudio técnico simultáneo.

20. Escala geológica del tiempo y evolución de la vida

TIEMPO ERA	PERIODO	ÉPOCA	ANTIGÜEDAD EN MILLONES DE AÑOS	EVOLUCIÓN DE LA VIDA
Cenozoico	Cuaternario	Holoceno Pleistoceno	0,011	Hombre moderno Hombre primitivo
	Terciario	Plioceno	0,5.3	Carnívoros grandes
		Mioceno	7	Austrolopitecos, abundancia de mamíferos de pasto
		Oligoceno	25	Mamíferos terrestres; ballenas; monos y grandes homínidos
		Eoceno	40	Angiospermas, caballos primitivos, radiación de los placentarios
		Paleoceno	60	Mamíferos placentarios
Mesozoico	Cretáceo		70	Clímax de reptiles gigantes terrestres y marinos. Extinción de los dinosaurios, plantas con flores; declinación de gimnospermas
	Jurásico		135	Apogeo de los dinosaurios; primeras aves, mamíferos primitivos
Paleozoico	Triásico		180	Aparición de los dinosaurios; reptiles parecidos a mamíferos; plantas gimnospermas, coníferas como plantas dominantes
	Pérmico		230	Radiación de reptiles; desplazamiento de anfibios; extinción de muchos invertebrados marinos
	Carbonífero superior		280	Primeros reptiles: insectos gigantes, grandes bosques de coníferas
	Carbonífero inferior		310	Radiación de anfibios; abundancia de tiburones; árboles de escama; helechos de semillas
	Devónico		345	Primeros anfibios; abundancia de peces fluviales; briojoarios y corales
	Silúrico		405	Primeros peces mandibulares
	Ordovícico		425	Primeros vertebrados; abundancia de invertebrados marinos; primeras plantas terrestres
	Cámbrico		500	Origen de muchos filos y clases de invertebrados; dominio de trilobites; algas marinas
Precámbrico			600	Algas fósiles; otros fósiles sumamente raros; esponjas y gusanos enterradores
Formación de la Tierra				Inicio de aminoácidos y otras moléculas simples; inicio de moléculas orgánicas complejas; proteínas; ácido nucleico
			4,600	

FUENTE: *Investigación y ciencia.*

Cantidades absolutas y relativas

En la presentación y tratamiento de la información se utilizan con frecuencia cantidades relativas, como los porcentajes, los tantos por millar y por cien mil, las partes por millón y las tasas, entre otras. La idea de cantidad relativa se encuentra también en muchos indicadores de bienestar social y de la economía, como son el número de habitantes por médico, de maestros por alumno, el producto interno o el ingreso *per cápita* de los habitantes de un país.

Como ejemplo, considérese el cuadro de la página siguiente que contiene algunos indicadores básicos que proporcionan el perfil de la República Mexicana en algunos aspectos significativos.

Conviene que por medio de situaciones concretas muy variadas y diversas los alumnos conozcan el uso y significado de indicadores como los del cuadro y otros similares. En particular, necesitan comprender los porcentajes y aprender a calcular con ellos y determinarlos. Como se dijo antes, la función principal de los porcentajes es reducir los datos a una base común y a números cuya magnitud permita compararlos con facilidad y darse cuenta de las relaciones existentes entre ellos.

Por ejemplo

1. Durante los años cincuenta y sesenta el petróleo fue una materia prima muy barata, lo que favoreció el desarrollo de los países industrializados. A principios de los años setenta, aumentó el precio del barril de petróleo, por lo que muchas naciones adoptaron políticas de ahorro en el consumo de energía. En la tabla aparecen los datos del consumo mundial de petróleo, para los años de 1973, comienzo de la llamada *crisis del petróleo*, y 1985.

REGIÓN	CONSUMO 1973	%	CONSUMO 1985	%	INCREMENTO	%
Norteamérica	914		776			
EU	826		708			
América Latina	164		219			
Cercano Oriente	60		90			
Lejano Oriente	400		415			
Japón	269		200			
África	48		85			
Europa Occidental	750		572			
Alemania	150		113			
Francia	127		85			
Italia	104		85			
Reino Unido	113		85			
Europa Oriental/China	454		645			
URSS	318		445			
China	38		91			
Total Mundial	2790		2802			

FUENTE: *La Recherche.*

Consumo mundial de petróleo 1973-1985 (millones de toneladas).

Llena las columnas en blanco de la tabla: *a)* los incrementos de consumo deberán ser indicados con los signos "+" o "–", según sean positivos o negativos; *b)* el porcentaje de consumo de cada país se calculará respecto del total mundial en el año correspondiente y *c)* el incremento porcentual de consumo se calculará respecto del consumo de cada país en 1973.

República Mexicana
Indicadores básicos

Esta selección de indicadores sólo intenta sugerir un perfil del país en algunos de sus aspectos significativos.

Perfil demográfico

Población: 86 154 000 (1990)

Densidad: 44.0 hab./km² (1990)

Proyecciones:

Año	**Pobl.**	**Dens.**[a]
2000	103 000 000	52.6
2025	142 000 000	72.5

Crecimiento poblacional[b] **(1985-1990):** 2.2

Natalidad (1985-1990): 29.0

Mortalidad (1985-1990): 5.8

Fecundidad en núm. de hijos (1985-1990): 3.6

Esperanza de vida al nacer: 68.9 años (1985-1990)

Población urbana: 72.6% (1990)

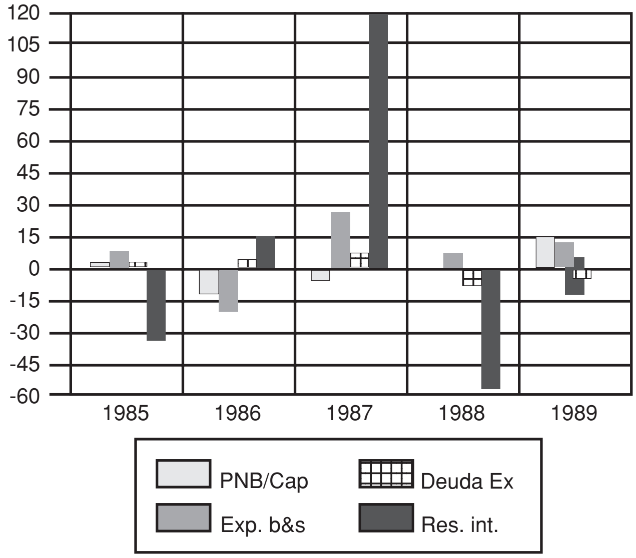
Población masculina: 49.2% (1990)

Composición de la población por edades: 49.3%, 0-19 años; 31.5%, 20-39 años; 15.3%, 40-64 años; 3.9%, 65+ años (1990)

Capital (hab): México D.F., 18 847 400 (1989)

Ciudades principales (hab):
Nezahualcóyotl, 2 350 000; Guadalajara, 2 178 000; Monterrey, 1 702 000; Puebla, 771 000; Acapulco, 635 000[g]; Ciudad Juárez, 797 679; León, 872 453; Tijuana, 742 686 (1990)

Perfil económico
% de cambio



Mortalidad infantil:

Año	(1980-1985)	(1985-1990)
Tasa	49.9	42.6

Perfil cultural

Analfabetismo (%):

Año	1970	1980	1990
Tasa	25.8	16.0	12.7

Matrícula escolar (%):

Año\Nivel	**1º**	**2º**	**3º**
1980	108.4[c]	46.0[d]	13.9
1987	118.0[cf]	53[od]	15.8

Alumnos por maestro:

Año\Nivel	**1º**	**2º**	**3º**
1980	39.0	18.0	12.2
1987	32.0	18.0	11.5[g]

Bibliotecas: 558(1986)[e]

Religión: Católicos, 94.7%; cristianos autóctonos, 1.0%; otros, 4.3%

Bienestar social

Habitantes por médico (1985): 1 037

Calorías y proteínas *per cápita* diarias promedio:

Año	(1979-1981)	(1986-1988)
Calorías	3 053.0	3 123.0
Proteínas	78.0	81.0

Perfil económico

Moneda (tasa de cambio): $3 083.5 por US$ (mar. 1992)

Ingreso por hab: US$2.010 (1989)

Tasa de inflación: 72.7 % (1980-1989)

Principales productos de exportación:
(1990) Petróleo crudo, 33%; productos metálicos, maquinaria y equipo, 18.0%; de los cuales automóviles, 7.1; maquinaria y eléctricos, 6.0%; productos químicos, 5.5%; alimentos procesados y bebidas, 4.2%. También exporta manufacturas diversas, productos textiles.

Importaciones de energía como porcentaje de las exportaciones de mercancías: 4% (1989)

Tierras cultivadas: 13.0% (1988)

[a] habitantes/km²; [b] proyecciones con base en hipótesis de fecundidad; [c] límite de edad: 6 a 10 años; [d] límite de edad: 12 a 17 años;
[e] nacionales y públicas; [f] 1985; [g] 1986; ver otras notas en *Notas metodológicas* (desborda los límites del D.F.).

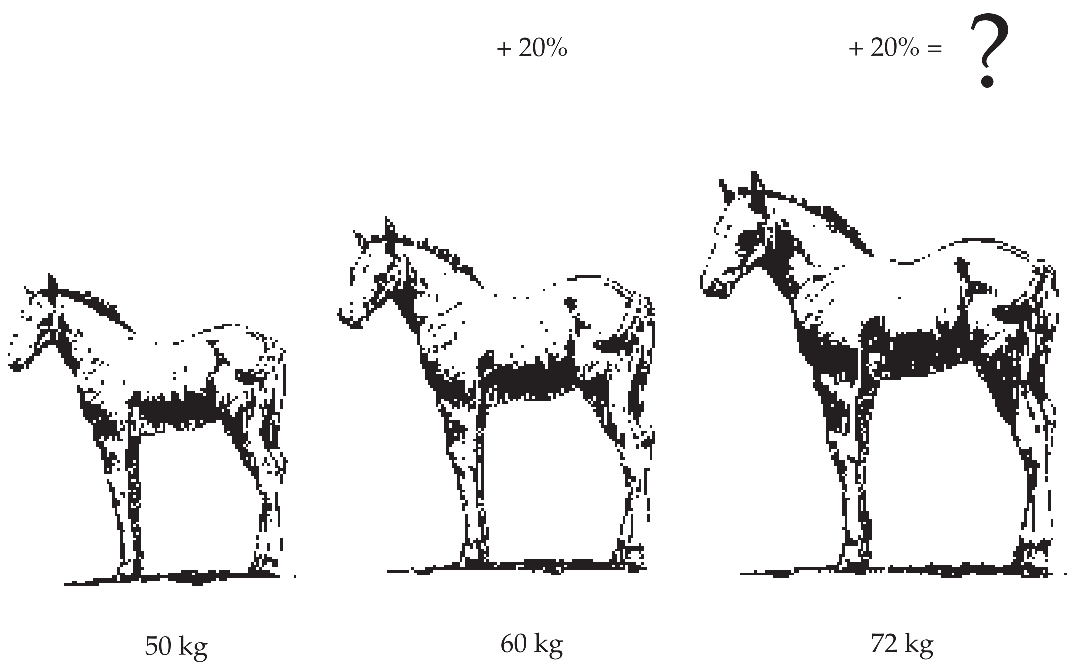
Fuente: *Almanaque Mundial*, 1993.

Conviene que, junto con los problemas relacionados con el cálculo y determinación de porcentajes, se planteen actividades y problemas para que los alumnos vean que operar con porcentajes es distinto a operar con números absolutos.

Por ejemplo

1. *¿20% + 20% = 40%?* No necesariamente. Supongamos que un biólogo está estudiando el crecimiento de un potrillo. Cuando comienza su investigación, el potrillo pesa 50 kg (el número ha sido simplificado para facilitar la presentación del ejemplo). Al cabo de un mes el peso se incrementa en 20%, esto es, en un quinto de 50 kg y el potrillo alcanza 60 kg. Asumamos que en el segundo mes el potrillo vuelve a aumentar 20% de su peso. Uno se sentiría inclinado a pensar que el incremento total es de 20% + 20% = 40%. Sin embargo, el cálculo da lugar a un resultado distinto: 20% de 60 kg da 12 kg, lo que quiere decir que el peso del potrillo llega a 72 kg, lo que representa 22 kg, esto es, 44% más de lo que pesaba al principio.

2. *¿50% - 50% = 0%?* De nuevo la respuesta es “no necesariamente”. Por ejemplo, si la producción de un árbol de manzanas aumenta de 120 kg a 180 kg, diremos que el incremento fue de 50%. Si al año siguiente la producción disminuye 50% entonces será de 90 kg y no de 120 kg como era originalmente.*



* Edward Bastchelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists,* Berlín, Springer Verlag, 1979.

3. El propietario de un inmueble le incrementa la renta a su locatario 10% y al año siguiente se la aumenta 15%. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento total en los dos años?

4. A continuación están dadas las tasas de inflación durante los tres trimestres del año de 2001 para un país "X". ¿Cuál fue la tasa de inflación acumulada durante todo el año?

I trimestre	II trimestre	III trimestre	IV trimestre
5.4	3.8	2.7	4.1

5. El 71% de la superficie de la Tierra está cubierta por los mares y océanos y el resto es tierra firme. De la tierra firme, 40% es desierto o está cubierto de hielo, 33% son pantanos, bosques y montañas y 27% es tierra cultivable. ¿Qué porcentaje de la superficie total de la tierra es cultivable?

6. El 8% de los miembros de una población fueron afectados por una cruel epidemia. De los afectados, 4% falleció a causa de la enfermedad. Calcula la mortalidad respecto a toda la población.

7. Cuando haces una compra además del precio de un artículo tienes que pagar 15% de Impuesto al Valor Agregado (IVA), salvo en el caso de los productos básicos. Si un comerciante ofrece 15 % de descuento sobre el valor de la compra, ¿significa esto que los artículos saldrían al mismo precio si no pagaras el IVA? En caso contrario, ¿qué te conviene más, que primero te carguen el IVA y luego hagan el descuento, que primero te hagan el descuento y luego te carguen el IVA o bien da lo mismo en uno u otro caso?

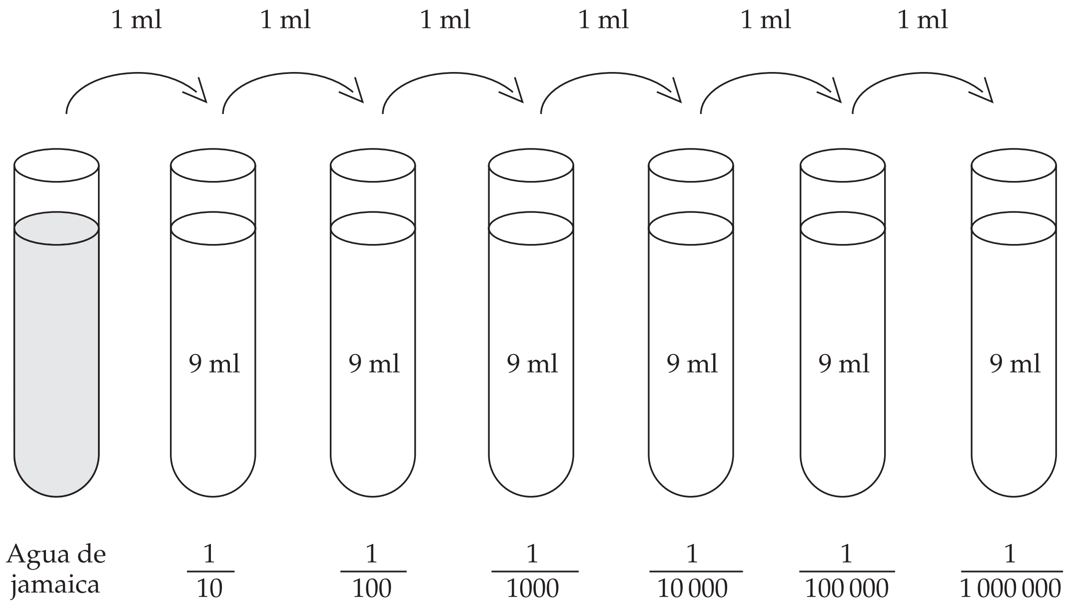
8. En una fábrica 65% de los artículos son producidos por una máquina A y 35% restante por otra máquina B. Si 5% de los artículos producidos por la máquina A y 8% de los producidos por la máquina B resultaron defectuosos ¿cuál es el porcentaje de artículos defectuosos producidos en toda la fábrica. □

Cuando el uso de porcentajes conduce a decimales menores que 1, se acostumbra cambiar de base y utilizar los tantos por millar o por 100 000. Así se habla del número de médicos o de camas de hospital por cada 1 000 habitantes; las tasas de mortalidad o debidas a una enfermedad específica se expresan con frecuencia en tantos por 100 000, etcétera.

Por otro lado, debido a la creciente atención que se presta al medio ambiente, las partes por millón, que antes casi sólo se utilizaban en la química, han invadido la vida cotidiana, ya que a partir de ellas se definen algunos índices de contaminación. La siguiente actividad podrá ayudar a los alumnos a imaginarse lo que significa una concentración de uno en un millón.

Actividad

1. Se toman 6 tubos de ensayo con 9 ml de agua pura cada uno y otro que contenga un líquido coloreado, puede utilizarse agua de jamaica, por ejemplo. Se deposita 1 ml de agua de jamaica en el primer tubo y se mezcla bien: la concentración de agua de jamaica en este tubo será 1/10. A continuación se toma 1 ml de la mezcla contenida en este tubo y se agrega al agua contenida en el segundo tubo y se mezcla bien: en éste la concentración de agua de jamaica será 1/100. Se continúa en la misma forma hasta terminar con el sexto tubo, en donde la concentración de agua de jamaica llegará a ser finalmente de 1/1 000 000.



Promedios y densidades

Además de los ejemplos dados en los párrafos anteriores, en la presentación y tratamiento de la información, así como en la vida cotidiana, se recurre con frecuencia a otros tipos de cantidades relativas, como son los promedios, las densidades, las concentraciones y las razones promedio de cambio de ciertas cantidades respecto a otras, por ejemplo, la velocidad promedio y el gasto o débito promedio de una llave.

En particular, la *media aritmética*, comúnmente conocida como el *promedio* se utiliza con frecuencia para describir en forma abreviada los datos de una lista (véase la página 314), mientras que las densidades sirven para dar una idea de cómo se distribuyen algunas cantidades respecto a otras.

Por ejemplo

En la siguiente tabla están dados los datos de extensión territorial y población para los diferentes estados de la República Mexicana.

DIVISIÓN POLÍTICA DE LA REPÚBLICA MEXICANA

Estados	Área km^2	Habitantes[a]	Capital	Habitantes[a]	Alt. m
Aguascalientes	5 197	943 506	Aguascalientes	313 090	1 867
Baja California	71 576	2 487 700	Mexicali	764 902	3
Baja California Sur	71 428	423 516	La Paz	99 750	30
Campeche	56 798	689 656	Campeche	127 512	5
Coahuila	149 511	2 295 808	Saltillo	272 376	1 568
Colima	5 483	540 679	Colima	92 053	494
Chiapas	73 724	3 920 515	Tuxtla Gutiérrez	118 340	536
Chihuahua	245 945	3 047 867	Chihuahua	501 696	1 435
Distrito Federal	1 547	8 591 309	Ciudad de México[b]	19 657 838	2 238
Durango	121 776	1 445 922	Durango	223 839	1 886
Guanajuato	30 768	4 656 761	Guanajuato	52 875	2 050
Guerrero	64 586	3 075 083	Chilpancingo	72 226	1 253
Hidalgo	20 502	2 231 392	Pachuca	120 462	2 399
Jalisco	78 389	6 321 278	Guadalajara	3 545 801	1 547
México	21 196	13 083 359	Toluca	1 019 197	2 651
Michoacán	58 200	3 979 177	Morelia	257 600	1 914
Morelos	4 968	1 552 878	Cuernavaca	288 960	1 528
Nayarit	26 908	919 739	Tepic	141 605	934
Nuevo León	64 210	3 826 240	Monterrey	3 022 268	522
Oaxaca	93 136	3 432 180	Oaxaca	144 272	1 558
Puebla	33 995	5 070 346	Puebla	1 561 558	2 162
Querétaro	11 978	1 402 010	Querétaro	222 110	1 816
Quintana Roo	39 376	873 804	Chetumal	6 498	3
San Luis Potosí	63 038	2 296 363	San Luis Potosí	849 309	1 867
Sinaloa	56 496	2534835	Culiacán	324 000	50
Sonora	180 833	2 213 370	Hermosillo	340 000	200
Tabasco	24 578	1 889 367	Villahermosa	204 000	11
Tamaulipas	78 932	2 747 114	Ciudad Victoria	150 000	311
Tlaxcala	4 037	961 912	Tlaxcala	15 120	2 229
Veracruz	71 735	6901111	Jalapa	216 050	1 435
Yucatán	43 257	1 655 707	Mérida	303 500	9
Zacatecas	73 103	1 351 207	Zacatecas	71 710	2 410

FUENTE: *Almanaque Mundial*, 1991.

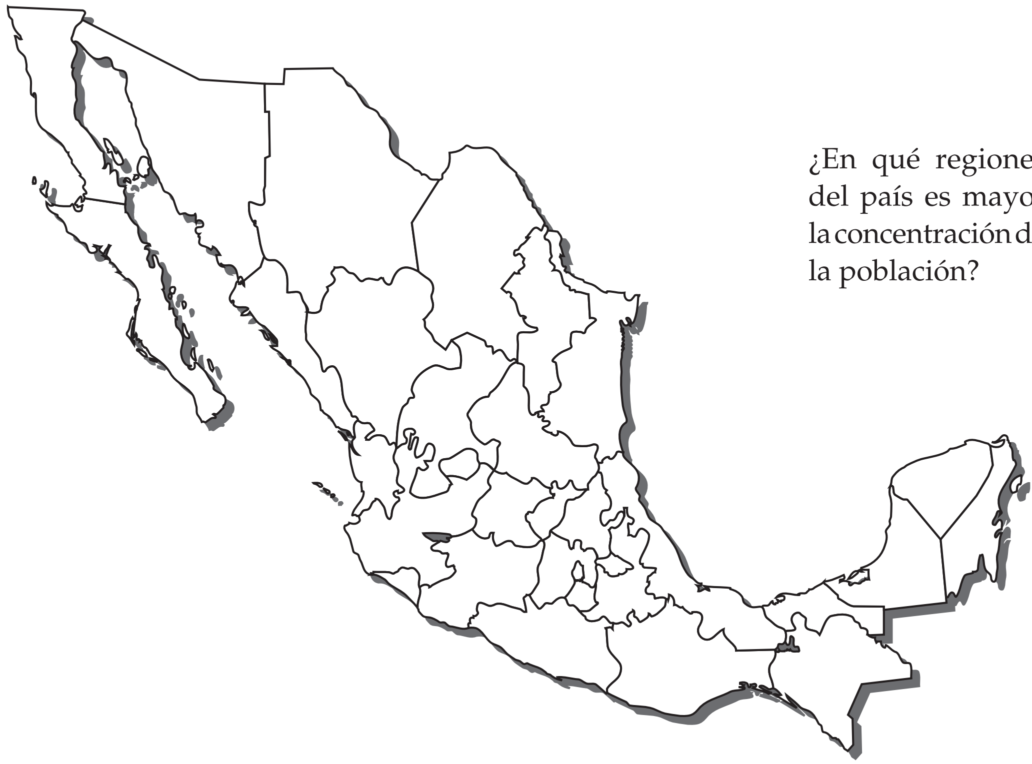
a) Calcula para cada estado de la República la densidad de población correspondiente. Luego distingue cada estado en el mapa de acuerdo con su densidad de población:

Si la densidad es menor que 25 habs./km^2

Si la densidad está entre 25 y 50 habs./km^2

Si la densidad está entre 50 y 100 habs./km^2

Si la densidad es mayor que 100 habs./km^2



¿En qué regiones del país es mayor la concentración de la población?

b) Uno de los problemas del país es que gran parte de sus actividades económicas, políticas y culturales está concentrada en la capital, debido al gran número de personas que viven en ella. Esta situación se reproduce en algunos estados del país. Calcula para cada estado la razón entre el número de habitantes en la capital y el total en todo el estado (si en algunos estados la capital y las ciudades que la rodean forman un mismo conglomerado urbano, calcula su número de habitantes y considéralo para obtener el cociente anterior). Examina y discute con tu profesor y compañeros lo que observas.

Problemas sobre promedios

1. Calcula el promedio de las siguientes listas de números:

a) 5, 0, 6, 2, 7, 0, 5, 5, 5, 2, 8, 1

b) 4, –5, 11, 3, 2, –6, –5, 3, 9, –7, 0, –5

c) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

d) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

e) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 100

f) 1, 2, 3, 4,...hasta 100, hasta 1 000

2. Encuentra tres listas de cinco números cuyo promedio sea 7.4.

3. ¿Cuántas listas hay de cuatro enteros naturales cuyo promedio sea igual 5.75?

4. En una ciudad del norte del país se observaron las siguientes temperaturas mínimas y máximas durante una semana de invierno. ¿Cuáles fueron sus temperaturas promedio?

	Dom	Lun	Mar	Miér	Jue	Vier	Sáb
Temperatura mínima (ºC)	4	–3	–3	–6	–8	–2	8
Temperatura máxima (ºC)	11	8	2	–2	–6	0	14

5. Los siguientes datos corresponden a la masa, en gramos, de proteína contenida en 20 muestras de granos de soya, cada una con un peso de 100 g. Calcular la masa promedio de proteínas contenidas en 100 g de granos de soya.

36	36.5	33.5	38	34.5	39	35.5	30.5	40	37
41.5	42	35	40	37	32.5	39.5	38	34	36

6. En la siguiente tabla está dada la constitución química (en %) de algunos animales de granja. Encontrar la constitución química, en %, del "animal de granja promedio". De entre los animales de la lista, ¿cuál es el que se aproxima más al animal promedio?

Animal	Prótidos	Lípidos	Glúcidos	Minerales	Agua
Caballo	17	17	1.5	4.5	60
Buey	15	26	0.4	4.6	54
Borrego	16	20	0.6	3.4	60
Puerco	15	24	0.2	2.8	58
Pollo	21	19	0.8	3.2	56

7. La estatura promedio de un grupo de alumnos es de 1.347 m. La suma de todas las alturas del grupo es 3 771 cm y hay 17 niños en la clase. ¿Cuántas niñas hay?

8. El promedio de calificaciones en un examen para 58 alumnos fue de 87.3. Después presentaron el examen otros 12 alumnos y sus exámenes tuvieron un promedio de 90.7. ¿Cuál fue el promedio para todos los alumnos? □

Problemas sobre velocidades promedio

1. Un automovilista recorrió 130 km en 1:30 horas. ¿Cuál fue su velocidad promedio?

2. En su viaje de una ciudad a otra, un automóvil viaja durante tres horas a una velocidad promedio de 90 km/h y durante dos horas a una velocidad promedio de 75 km/h. ¿Qué distancia recorrió? ¿Cuál fue su velocidad promedio en todo el viaje? ¿La velocidad promedio es igual al promedio de las velocidades?

3. En una excursión, Juan recorrió 22 km a una velocidad promedio de 8.5 km/h y 17 km a una velocidad promedio de 6 km/h. ¿Cuál fue su velocidad promedio en todo el recorrido? ¿La velocidad promedio es igual al promedio de las velocidades?

Descripción de una lista de datos

Estudios estadísticos

El término *estadística* suele utilizarse con varios significados diferentes. En el uso común se habla de "una estadística" para designar una conjunto de datos, generalmente numéricos, obtenidos mediante experimentación u observación y usualmente ordenados en forma de listas o tablas, o presentados gráficamente. Es en este sentido que en el lenguaje coloquial se dice que en la sección financiera de los periódicos vienen un "montón" de estadísticas.

Desde un punto de vista más técnico, la estadística es una ciencia (algunos profesionales de la materia agregarían y un arte) que se vale de una serie de técnicas sistemáticas para recolectar y tratar datos; que genera información comprensible a partir de los mismos; y que utiliza procedimientos y argumentos muy ligados a la teoría matemática de las probabilidades, para validar sus afirmaciones. En este sentido del término un farmacólogo dice que va a realizar un estudio estadístico de los efectos de determinado antibiótico; un meteorólogo habla de modelos estadísticos del clima; o un ingeniero industrial se refiere a los métodos estadísticos del control de calidad.

El propósito de la estadística consiste en estimar la plausibilidad de ciertas conclusiones con base en lo que se observa en un conjunto de datos. Así, los resultados que se desprenden de un estudio estadístico son inferencias probables y no conclusiones seguras como las afirmaciones de las matemáticas u otras ciencias exactas. Tales estimaciones constituyen una herramienta poderosa, tanto para aumentar nuestro conocimiento de la naturaleza como para la realización con éxito de diversas actividades prácticas.

Los fenómenos naturales y sociales, así como los procesos derivados de la actividad práctica son, por lo general, demasiado complejos y extensos para poder abarcarlos en su totalidad. No es posible medir la presión atmosférica, la temperatura, la humedad y otras variables del clima en cada punto de la Tierra y a cada instante. Sin embargo, el meteorólogo hace predicciones plausibles sobre el estado del tiempo a partir de un conjunto limitado, si bien extenso, de mediciones. No se prueba la duración de todos los focos que salen de una fábrica —porque se inutilizaría la producción antes de llegar al mercado—, pero probando algunos lotes de focos apropiadamente seleccionados, los fabricantes pueden estar razonablemente seguros de permanecer dentro de las normas de calidad requeridas. En el lenguaje de la estadística se diría que se infieren las características de una población estudiando *muestras*.

La mayoría de los estudios estadísticos se realiza sobre muestras, aún en los casos en que es posible interrogar u observar a toda la población. Una razón de peso es que estudiar a la población entera, además de no ser necesario, puede resultar excesivamente costoso o dar lugar a efectos no deseados. Por ejemplo, interrogar a toda una población de personas resulta en muchos casos prácticamente imposible y al intentar hacerlo pueden introducirse sesgos en la muestra; conviene más trabajar con muestras no tan grandes, pero sí cuidadosamente escogidas. En muchos casos las pruebas de un nuevo medicamento conllevan riesgos y, por tanto, no pueden utilizarse muestras humanas numerosas, sino muestras pequeñas y rigurosamente controladas (además, por razones metodológicas no es posible probar un nuevo medicamento con todos los enfermos, pues por lo general la prueba consiste precisamente en comparar sus efectos en dos grupos de enfermos: uno que ha tomado el medicamento y otro que no lo ha tomado o se le ha administrado un placebo).

El tratamiento completo de una muestra requiere de nociones de probabilidad y estadística fuera del alcance de las matemáticas de la secundaria. Sin embargo, es posible proponer actividades para que se comprendan de manera intuitiva las nociones de muestra y encuesta. El profesor deberá tener cuidado al plantear las actividades para que los alumnos no se queden con la impresión de que cualquier muestra es aceptable y que basta con salir a la calle y hacer unas cuantas preguntas para conocer la opinión de toda la gente.

Es importante que en tercer año se traten algunos problemas sencillos de estudios estadísticos reales, para que los alumnos vean la multitud de aspectos de la realidad que puede ser objeto de un estudio de este tipo y el cuidado que se pone en la selección de la muestra y en la interpretación de los resultados.

Presentación y descripción de los datos

Los resultados de un estudio estadístico vienen por lo general en forma de grandes listas de datos, como los siguientes.

1. Respuestas a una pregunta de probabilidad

En una encuesta para explorar el grado de comprensión alcanzado en ciertas nociones de probabilidad, se le propuso a 50 alumnos que respondieran, entre otras, a la siguiente pregunta:*

Si lanzamos 10 volados, ¿qué es más probable?

A) Obtener exactamente un águila.

B) Obtener exactamente dos águilas.

C) Ambos eventos tienen las mismas oportunidades de ocurrir.

Las respuestas que se obtuvieron fueron las siguientes:

B, B, C, B, C, A, A, B, B, B, C, C, A, B, C, C, A

B, B, B, C, A, B, C, B, B, C, C, B, B, B, B, A, C

A, C, C, B, B, B, B, C, B, C, B, B, A, C, B, C

2. Vida de un acumulador

Los siguientes datos corresponden a la duración real de 40 acumuladores (baterías eléctricas) para automóvil, los cuales tienen una garantía de tres años otorgada por el fabricante (*Nota:* están indicados los años y los meses de duración de cada batería; por ejemplo, 3;02 quiere decir que la batería duró 3 años y 2 meses):

3;02	3;01	2;11	3;02	3;11	2;02	3;04	3;05	2;06	4;08
3;08	3;01	3;04	4;01	3;00	4;01	1;07	4;04	3;01	3;09
3;00	4;08	3;11	1;11	4;02,	3;06	3;01	3;05	3;08	3;02
2;07	3;08	3;01	3;05	3;06	4;06	3;04	3;07	4;05	2;07

* Si se quiere utilizar este ejemplo en clase será conveniente plantear la pregunta a los alumnos y dejarlos que proporcionen sus propias respuestas. Después se podrá hacer el estudio estadístico de las respuestas observadas, resolver y discutir la situación del problema junto con ellos para que comprendan cuál es la respuesta correcta.

Utilizaremos las situaciones anteriores para revisar brevemente las formas usuales de presentar y describir los datos de una lista.

El primer paso consiste en construir una tabla donde aparezcan las frecuencias con las que ocurre cada evento y resalten los hechos importantes. En el primer ejemplo "Pregunta de probabilidad" la tabla es como la de al lado.

Para el ejemplo de la "Vida de un acumulador" conviene agrupar los datos en intervalos de seis meses, es decir, contar las baterías que duraron entre 1;06 y 2;00 años, las que duraron entre 2;00 y 2;06 años, etcétera. Sólo es necesario tener cuidado con los datos que quedan en los extremos de algún intervalo; por ejemplo, ¿qué hacemos con las baterías que duraron 3;00 años?, ¿las contamos entre las que duraron de 2;06 a 3;00 años o entre las que duraron de 3;00 a 3;06 años? En estos casos la convención es que se cuenten dentro del intervalo ubicado a la derecha, esto es, las baterías que duraron 3;00 años se contarán entre las que duraron de 3;00 a 3;06 años.

PREGUNTA DE PROBABILIDAD

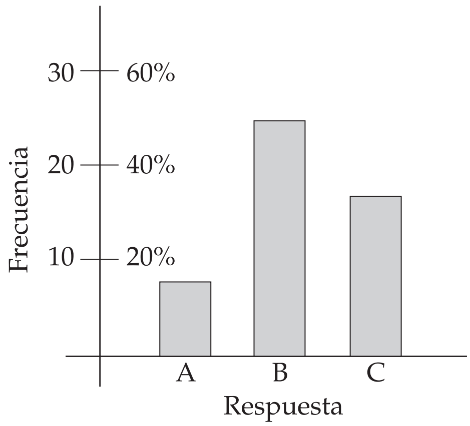
RESPUESTA OBSERVADA	CONTEO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA (%)
A	~~||||~~ |||	8	16
B	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	25	50
C	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||	17	34
Total		50	100

VIDA DE UN ACUMULADOR

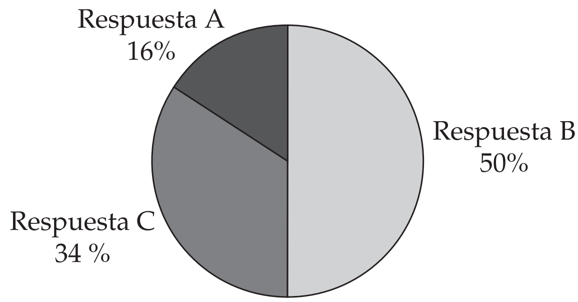
INTERVALO	CONTEO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA (%)
1;06-2;00	||	2	5
2;00-2;06	||	2	5
2;06-3;00	|||	3	7.5
3;00-3;06	~~||||~~ ~~||||~~ |||	13	32.5
3;06-4;00	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12	30
4;00-4;06	||||	4	10
4;06-5;00	||||	4	10
Total		40	100

Después los datos de las tablas se representan por medio de gráficas. Los de la "pregunta de probabilidad" pueden representarse por medio de una *gráfica de barras* (gráfica A) o, si quieren resaltarse los tamaños relativos de las frecuencias con las cuales se dio cada respuesta, mediante un *diagrama de sectores* (gráfica B). Los de la vida de un acumulador pueden representarse por medio de un *histograma* o de un *polígono de frecuencias* (gráficas C y D).

Preguntas de probabilidad

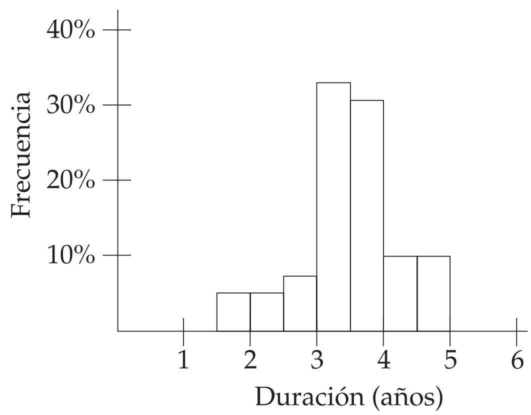


Gráfica A

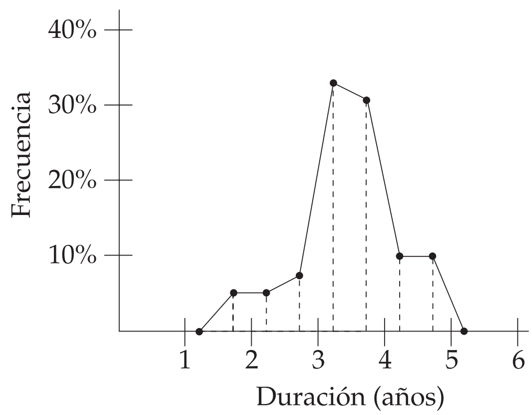


Gráfica B

Vida de un acumulador



Gráfica C



Gráfica D

El siguiente paso después de construir la tabla y la gráfica de frecuencias consiste en resumir la información contenida en la tabla en dos números:

- Una *medida de tendencia central* que representa el conjunto de los datos.

- Una *medida de desviación o dispersión* que sirve para indicar la forma en que se acumulan o agrupan los datos alrededor del valor central o, dicho en otros términos, muestra qué tan representativo es el valor central escogido del conjunto de los datos.

En el caso del problema de probabilidad y otros similares, donde los datos son puramente nominales, la medida de tendencia central que se utiliza es la *moda*, es decir, el dato que aparece con más frecuencia. Conviene también indicar el número de datos diferentes. Así, la descripción quedaría: *de las tres respuestas posibles, la que los alumnos dieron **con más frecuencia fue la B**, que apareció **50% de las veces.***

En casos como el de la vida de un acumulador pueden utilizarse varias medidas de tendencia central, pero lo usual es dar el promedio o *media aritmética* de los datos: *los acumuladores tuvieron una **duración promedio** de alrededor de **4;01 años***. El promedio se utiliza porque en muchas situaciones que aparecen con frecuencia, los datos tienden a acumularse alrededor del promedio. Sin embargo, esto no ocurre siempre y deberá tenerse en cuenta al diseñar las actividades que se le propongan a los alumnos.

Para indicar la forma como el conjunto de los datos se desvía o aleja del promedio, se utiliza por lo general la *desviación estándar*. En la educación secundaria no se estudiarán las medidas de dispersión, pero es conveniente que en algunos problemas sencillos, los alumnos construyan una tabla para observar cómo se desvía cada dato del promedio. Así podrán juzgar si éste representa bien o mal el conjunto de los datos.

Por ejemplo

1. Los datos que vienen a continuación corresponden a los precios observados en cinco tiendas diferentes para una lata de atún de la marca X y un paquete de servilletas de la marca Y.

Artículo	Tienda I	Tienda II	Tienda III	Tienda IV	Tienda V
Atún X	\$5.20	\$4.65	\$3.95	\$4.60	\$4.65
Servilletas Y	\$11.70	\$10.95	\$8.40	\$9.10	\$8.75

Calculando los promedios correspondientes, obtenemos:

Precio promedio de la lata de atún X = \$4.61

Precio promedio de las servilletas Y = \$9.78

A continuación se construye, para cada caso, una tabla donde aparezcan las desviaciones absolutas y relativas de los precios observados en cada tienda respecto al promedio (los datos de porcentaje aparecen redondeados).

Atún X

Tienda	Precio	Desviación absoluta en %	
I	\$5.20	+59	1
II	\$4.65	+0.4	–
III	\$3.95	–0.66	1
IV	\$4.60	–0.01	–
V	\$4.65	+0.04	–

Servilletas Y

Tienda	Precio	Desviación absoluta en %	
I	\$11.70	+1.92	2
II	\$10.95	+1.17	1
III	\$8.40	–1.38	2
IV	\$9.10	–0.68	–
V	\$8.75	–1.03	1

En las tablas se ve que en el caso del atún, el precio promedio representa bien el conjunto de los datos. La situación no es tan clara para las servilletas, porque algunos precios parecen apartarse bastante del promedio.

Situaciones como la anterior permitirán que los alumnos se den cuenta de la forma en que los valores extremos afectan el promedio y comprendan por qué conviene agregar información adicional, o definitivamente hay casos donde es preferible no utilizarlo. Para el caso de las servilletas puede decirse que: "*los precios* ***oscilan entre \$8.75 y \$12.00****, siendo el* ***precio promedio \$9.78".***

Conviene que tanto las actividades de elaboración de tablas y gráficas como el cálculo de promedios aparezcan ligados a la solución de problemas. Así, en el ejemplo de la vida de un acumulador pueden plantearse preguntas como las siguientes:

¿Qué proporción de los acumuladores duró menos que la garantía ofrecida por el fabricante? ¿Qué proporción duró más?

En un lote de 500 acumuladores como los probados, ¿cuántos crees que durarán menos que la garantía ofrecida por el fabricante?

¿Qué proporción de los acumuladores duró menos que el promedio? ¿Qué proporción duró más?

¿Por qué crees que el fabricante ofrece una garantía menor que la duración promedio de los acumuladores?

Aunque en las revistas y los periódicos aparecen con frecuencia datos de origen estadístico, no siempre es fácil encontrar ejemplos que resulten interesantes para los alumnos. Además, la información ya viene resumida o presentada en tablas y gráficas, por lo que no puede utilizarse para que los alumnos practiquen estos aspectos del tratamiento estadístico. Por otro lado, es conveniente que haya actividades en que los alumnos participen activamente desde el planteamiento del problema por investigar y la recolección de los datos.

A continuación se presentan algunas actividades que podrán ser útiles al profesor para su clase.

1. ¿Cómo seremos (o cómo éramos)?

Cuando los alumnos ingresan a la secundaria están en una etapa de crecimiento y son muy diferentes de como serán cuando la terminen tres años más tarde, tanto física como mentalmente. Tomando este hecho como motivación, se les podrá proponer que para saber cómo serán al terminar la secundaria, registren su peso y estatura y los comparen con los de los alumnos de tercer grado. En esta actividad es conveniente tratar por separado los datos de los niños y de las niñas.

La comparación podrá hacerse de diversas maneras, por ejemplo:

- Comparando las tablas donde aparezcan los pesos y las estaturas de los alumnos de primer y tercer grados.

- Comparando los aspectos de las gráficas correspondientes (en este caso conviene construir las gráficas sobre el mismo sistema de ejes).

- Comparando el peso y estatura promedios de los alumnos de primer grado con los de los alumnos de tercero.

Hay otra forma interesante de realizar la comparación. Consiste en formar una pareja ordenada con la estatura y el peso de cada alumno y representar las parejas que se obtienen en un sistema de ejes coordenados, utilizando colores diferentes (o circulitos y cruces) para los alumnos de primero y tercero.

La actividad anterior también puede realizarse en tercer grado, pero ahora para que los alumnos observen cuánto han cambiado desde que entraron al primer grado.

2. ¿Qué tan buenos somos para estimar?

Se les puede pedir a los alumnos que estimen una cantidad, por ejemplo:

- La altura de un árbol o un edificio.
- El peso de un objeto o la capacidad de un recipiente.
- La longitud de una línea dibujada por el profesor en el pizarrón, las dimensiones del salón de clases, o la distancia desde la escuela a un punto importante de su ciudad.

Luego harán un tratamiento estadístico de sus respuestas y las compararán con los valores reales, para ver si son buenos estimadores.

En el tercer grado, actividades como estimar la altura de un árbol o de un edificio podrá servir para introducir a los alumnos en los problemas que plantea la medición de distancias inaccesibles y su solución utilizando semejanza o trigonometría. También podrán discutirse con ellos algunas estrategias sencillas de estimación, por ejemplo, no es difícil estimar la altura de un edificio si primero uno estima la altura de cada piso y luego se multiplica por el número de pisos. Tampoco es difícil conocer aproximadamente la altura de un árbol si uno lo compara con algo que esté cerca de él y cuya altura pueda estimarse o conocerse con facilidad.

3. ¿Conozco el precio de las cosas?

Sobre una hoja de papel se dibujarán varios objetos de uso común, por ejemplo, un automóvil, una estufa y un refrigerador o, si se quiere, algunos alimentos de consumo frecuente. Luego se hacen fotocopias y se les reparten a los alumnos, pidiéndoles que estimen el valor aproximado de cada cosa.

Después de hacer un tratamiento estadístico de sus respuestas, los alumnos investigarán en el mercado el precio real de los objetos y, como en la actividad anterior, lo compararán con sus estimaciones.

4. Las noticias

Se les pide a los alumnos que durante algunos días vean y escuchen con atención las noticias o que revisen las primeras planas de los periódicos con el propósito de observar y hacer un estudio sobre el énfasis que se pone en los diferentes tipos de noticias, los personajes, tanto nacionales como internacionales, que son mencionados o fotografiados con más frecuencia y si reciben menciones positivas o negativas. Después podrán hacer un reporte sobre lo observado y las noticias que fueron más importantes durante el periodo de observación.

Antes de realizar la actividad anterior, es importante que los alumnos discutan entre sí y se pongan de acuerdo sobre los aspectos de las noticias que serán objeto de seguimiento.

5. Una encuesta de preferencias

Se les podrá pedir a los alumnos que ordenen las materias de la secundaria según su preferencia. Luego se examinan las respuestas de todo el grupo y se obtiene el rango (lugar) promedio que ocupó cada materia, para ver cuáles fueron las preferidas y, también, cuáles son aquellas que les gustan menos. Para cada materia podrá hacerse una tabla y una gráfica donde aparezcan el número de veces que ocupó el primer, el segundo, el tercer rango, … Después se compararán los perfiles observados para las diferentes materias. También podrá verse si las preferencias son las mismas entre los varones que entre las mujeres, etcétera.

En forma similar podrán diseñarse otras encuestas de preferencias: deporte que más les gusta, profesión que les gustaría ejercer, tipo de programa de televisión que ven con más frecuencia, etcétera.

6. Canasta básica

Se les propone a los alumnos que con la ayuda de sus padres elaboren una lista de 12 o 15 productos básicos, cuyo costo represente una parte importante del presupuesto familiar, indicando para cada producto la cantidad consumida semanalmente. Luego investigarán el valor de estos productos en diferentes establecimientos y los compararán entre sí. Esta actividad podrá repetirse varias veces durante el año para que los alumnos observen la evolución del costo de los productos básicos.

Una actividad similar consiste en pedirles que investiguen, en diversas tiendas, el precio de diferentes presentaciones de un mismo producto y que calculen y comparen la razón *precio/cantidad* en cada caso.

7. Kilometraje y devaluación de un automóvil

Que los alumnos recojan información sobre el kilometraje recorrido por automóviles de diferentes años, construyan una gráfica “Año del modelo *vs* kilometraje recorrido” y calculen lo que recorre en promedio un automóvil al año.

También puede pedírseles que investiguen en las secciones de anuncios de los periódicos o en el mercado los precios de los automóviles de segunda mano, según marca, modelo y año, y realicen un estudio de cómo se devalúa un automóvil con el paso del tiempo.

8. Estimación de probabilidades

Se les plantea a los alumnos la siguiente pregunta:

Cinco personas suben al elevador de un edificio de cinco pisos. ¿Es poco o muy probable que las cinco personas desciendan en pisos diferentes?

Se pide a cada alumno que marque su respuesta en una escala como la siguiente:

Imposible	Poco probable								Muy probable	Seguro
0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%

Después de que los alumnos realicen un análisis estadístico de sus respuestas, podrá simularse la situación para que contrasten sus estimaciones con la probabilidad real. Si se considera conveniente, también podrá calcularse el valor teórico de la probabilidad:

$$\text{Probabilidad de que las cinco personas desciendan en pisos diferentes} = \frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{24}{625} = 0.038 = 3.8\%$$

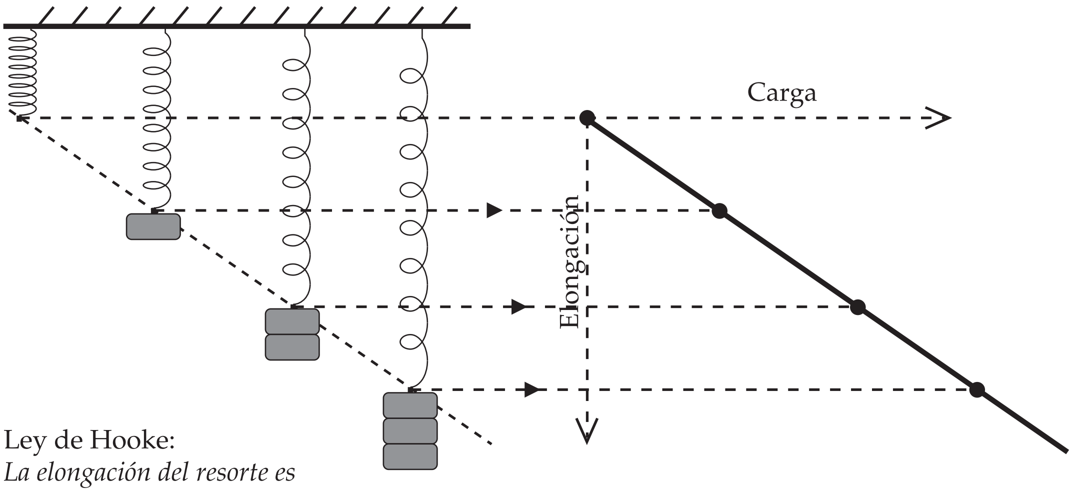
que, como puede verse, es muy baja.

El tratamiento de la información y las funciones

Un problema central en toda disciplina consiste en establecer relaciones entre las distintas variables o cantidades que intervienen en un fenómeno y, de ser posible, llegar a fórmulas que sirvan para calcular o estimar los valores de una cantidad cuando se conoce el valor o los valores de otras.

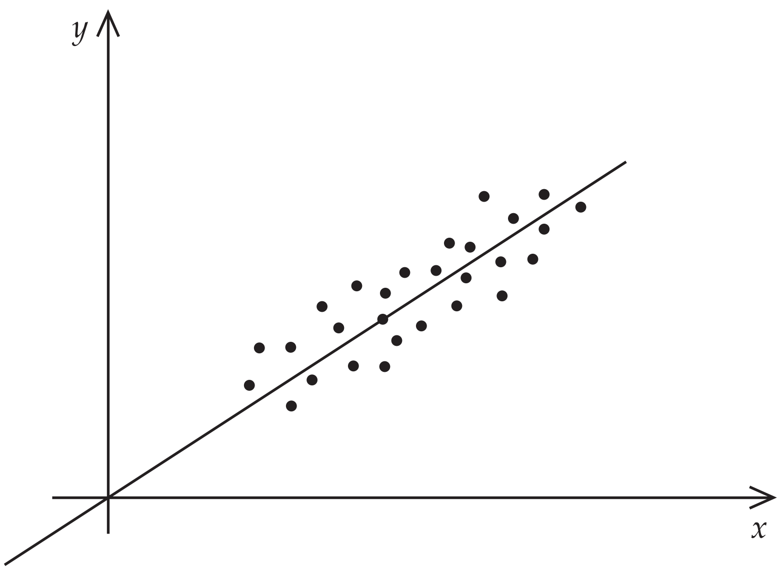
En muchas ocasiones no se conoce lo suficiente un fenómeno como para construir un modelo matemático y utilizarlo para deducir tales fórmulas. En estos casos lo que procede es hacer observaciones y construir una tabla para explorar las relaciones entre los valores de las variables. A partir de esta tabla pueden buscarse luego las fórmulas que expresan una cantidad en función de otra o sirven para predecir valores.

En algunos casos sencillos lo anterior no es difícil de llevar adelante. Así ocurre, por ejemplo, cuando la relación entre las variables corresponde a una función lineal $y = ax + b$, y los valores de las variables no están afectados por factores que oscurezcan esta relación, salvo quizá por los errores propios de toda medición. Puede reconocerse que se está en el caso anterior si al representar los valores en una gráfica se obtiene una línea recta. Entonces pasar de la tabla o de la gráfica a la fórmula puede hacerse sin mayor problema. Un ejemplo muy conocido es la llamada *Ley de Hooke*, que relaciona la elongación de un resorte o alambre con la fuerza que se aplica para estirarlo (véase también, la página 109).



Ley de Hooke:
La elongación del resorte es proporcional a la carga

Otras veces, sin embargo, dos variables están relacionadas pero hay, como se dijo antes, factores que oscurecen o hacen borrosa la relación entre ellas y dan lugar a que la gráfica tenga el aspecto de una nube de puntos como la que aparece a continuación. Por ejemplo, la estatura y el peso de las personas están relacionadas y esperamos que entre mayor sea la estatura, mayor sea el peso. No obstante, si medimos la estatura y peso de varias personas, formamos en cada caso la pareja (*estatura*, *peso*) y localizamos los puntos correspondientes en un sistema de ejes cartesianos, veremos que la ubicación de los puntos no sigue una regla completamente definida, sino que se dispersan.



Una situación interesante se presenta cuando los puntos de la nube se agrupan o acumulan alrededor de una línea recta. En estos casos hay técnicas que permiten ajustar una recta a nubes de puntos como la anterior, es decir, técnicas para encontrar una función de la forma $y = ax + b$ que sirva para estimar o predecir los valores de y a partir de los valores de x, con el mínimo error posible. Estas técnicas no se estudian en la secundaria, por lo que no se discutirán por el momento; sin embargo, el profesor puede encontrarlas en cualquier buen libro de estadística. A continuación se sugieren algunas actividades que podrán servir al profesor para que, de manera informal, sus alumnos estén en contacto y exploren algunas de las ideas anteriores.

1. Peso y estatura

Puede pedirse a los alumnos que midan su estatura y se pesen, para luego formar la pareja ordenada (*estatura*, *peso*). El profesor dibujará un sistema de coordenadas en el pizarrón y cada alumno pasará a localizar y marcar el punto que corresponde a su estatura y peso. Conviene que se utilicen colores distintos para señalar los puntos de los varones y las niñas.

Los alumnos discutirán el aspecto de las nubes que se obtienen y las relaciones entre la estatura y el peso de una persona.

> A las nubes de puntos que se obtienen en ejemplos como el anterior se les conoce con el nombre de *diagramas de dispersión*.

2. Kilometraje vs modelo (el año)

Que los alumnos hagan una encuesta y recojan información sobre el kilometraje recorrido por automóviles de diferentes años; construyan el diagrama de dispersión correspondiente y analicen la relación que hay entre el número de kilómetros recorridos y el modelo de un automóvil.

A partir de los datos tratará de predecirse el número de kilómetros recorridos por un automóvil de 1, 2, 3, ... años de antigüedad.

3. La forma de un libro

Que los alumnos escojan al azar 20 o 25 libros de la biblioteca y registren sus dimensiones (largo y ancho), así como el número de páginas. Luego construirán los diagramas de dispersión que necesiten para responder a las siguientes preguntas:

¿Hay alguna relación entre el ancho y el largo de un libro?

¿Entre el largo y el número de páginas?

¿Entre el ancho y el número de páginas?

Dijimos antes que era fácil saber si la relación entre dos variables es una función lineal de la forma $y = ax + b$. Esto es posible debido a que las funciones lineales tienen dos propiedades que indicaremos a continuación:

- La primera es que las gráficas de este tipo de funciones son líneas rectas. Ahora bien, como resulta fácil reconocer a simple vista si tres o más puntos están alineados, lo anterior nos proporciona un criterio gráfico para saber si dos variables x e y están relacionadas por una función lineal.

- La segunda es que si en una función lineal $y = ax + b$ asignamos valores igualmente espaciados a la x, entonces los valores que se obtienen para y también quedan igualmente espaciados, lo que permite saber a partir de una tabla si ésta corresponde o no a una función lineal.

La primera propiedad se aplica con frecuencia para conocer la forma algebraica de una función, aunque ésta no sea lineal. Existen papeles especiales para graficar, como el *semilog* o el *log–log*, que transforman las gráficas de ciertas funciones en rectas. Por ejemplo, el papel semilog transforma las gráficas de funciones logarítmicas y exponenciales en rectas, según donde se represente la variable independiente. Entonces, si al graficar una función en este papel se obtiene una recta, puede decirse que los datos corresponden a una función de estos tipos.

La segunda propiedad tiene una extensión interesante a las funciones polinomiales de grado mayor. Para ilustrarla considérese el polinomio:

$$y = 2x^2 - 3x + 5$$

Y tomemos valores igualmente espaciados para la variable x, por ejemplo, los valores $x = 0, 2, 4, 6, ...$ Calculemos los valores correspondientes de y y calculemos también las primeras y segundas diferencias de esos valores (las segundas diferencias son las diferencias de las diferencias).

Se ve que las segundas diferencias toman siempre el mismo valor. El lector podrá verificar en otros ejemplos que lo anterior no depende del polinomio escogido y que, en general, *las n-ésimas diferencias de un polinomio de grado* n *son constantes*.

x	$y = 2x^2 - 3x + 5$		
0	5		
		+ 2	
2	7		+16
		+18	
4	25		+16
		+34	
6	59		+16
		+50	
8	109		+16
		+66	
10	175		+16
		+82	
12	257		+16
		+98	
14	355		

La propiedad anterior proporciona un criterio para identificar cuándo los valores de una tabla corresponden a un polinomio. Una vez que se sabe esto, existen métodos sencillos para pasar de la tabla a la expresión algebraica correspondiente. Consulte el tema 14 del *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria*, página 113.

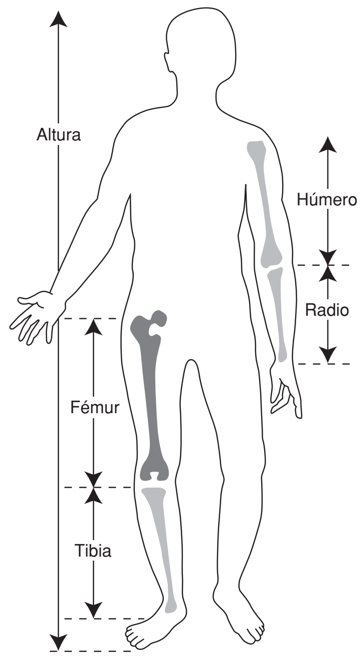
En los párrafos anteriores intentó presentarse, de una manera necesariamente resumida, un aspecto de las funciones que no se había discutido antes: cómo ajustar una fórmula a datos obtenidos empíricamente por medición u observación. En la escuela secundaria sólo se darán los primeros pasos en esta dirección, pero es importante que los alumnos resuelvan problemas que los lleven a pasar de la tabla o la gráfica de una función lineal a su expresión algebraica. También es importante que conozcan ejemplos —extraídos de la física, la química, la biología y otras disciplinas— de funciones establecidas empíricamente, aunque por el momento sólo puedan comprender intuitivamente cómo se llegó a las fórmulas.

Por ejemplo

1. La tabla que viene a continuación muestra las funciones que se utilizan para encontrar la estatura en vida de una persona a partir de la longitud de algunos de sus huesos. Dibuja las gráficas que muestran cómo depende la estatura de un hombre y una mujer de las longitudes de sus huesos.

ESTATURA EN VIDA (CENTÍMETROS)	
HOMBRES	MUJERES
(2.894 × húmero) + 78.09	(2.754 × húmero) + 57.97
(3.79 × radio) + 79.42	(4.74 × radio) + 54.93
(2.32 × fémur) + 65.53	(2.47 × fémur) + 54.10
(2.32 × tibia) + 81.93	(2.9 × tibia) + 61.53

FUENTE: *El cuerpo humano*, Time Life.



La estatura y los huesos. Tan exacta es la relación entre varios huesos y la estatura, que los detectives antropológicos, sin más pista que un hueso descarnado, pueden calcular aproximadamente la estatura que tenía su dueño. Así, si encuentran un fémur femenino de 45 cm, el cuadro aritmético de la derecha da una estatura de alrededor de 1.65 m. Cosa curiosa, un radio que sea largo en comparación con los otros tres huesos (como en los monos) indica una persona relativamente baja.

EL PESO IDEAL PARA MUJERES DE 25 AÑOS DE EDAD O MÁS

COMPLEXIÓN PEQUEÑA		COMPLEXIÓN MEDIANA		COMPLEXIÓN GRANDE	
libras	**kg**	**libras**	**kg**	**libras**	**kg**
92 - 98	42 - 44	99 - 107	44 - 49	104 - 119	47 - 54
94 - 101	43 - 46	98 - 110	44 - 50	106 - 122	48 - 55
96 - 104	44 - 47	101 - 113	46 - 51	106 - 125	49 - 57
99 - 107	45 - 49	104 - 116	47 - 53	112 - 120	51 - 58
102 - 110	46 - 50	107 - 119	48 - 54	115 - 131	53 - 59
105 - 113	48 - 51	110 - 122	50 - 55	118 - 134	54 - 61
108 - 116	49 - 53	113 - 126	51 - 57	121 - 138	55 - 63
111 - 119	50 - 54	116 - 130	53 - 59	125 - 142	57 - 64
114 - 123	52 - 56	120 - 135	54 - 61	129 - 146	59 - 66
118 - 127	54 - 58	124 - 139	56 - 63	133 - 150	60 - 68
122 - 131	55 - 59	128 - 143	58 - 65	137 - 154	62 - 70
126 - 135	57 - 61	132 - 147	60 - 67	141 - 158	64 - 72
130 - 140	59 - 64	136 - 151	62 - 68	143 - 163	66 - 74
134 - 144	61 - 65	140 - 155	64 - 70	149 - 168	68 - 76
138 - 148	63 - 67	144 - 159	65 - 72	153 - 173	69 - 78

Estatura

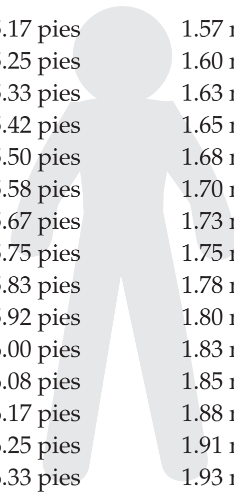
4.83 pies	1.47 m
4.92 pies	1.50 m
5.00 pies	1.52 m
5.08 pies	1.55 m
5.17 pies	1.57 m
5.25 pies	1.60 m
5.33 pies	1.63 m
5.42 pies	1.65 m
5.50 pies	1.68 m
5.58 pies	1.70 m
5.67 pies	1.73 m
5.75 pies	1.75 m
5.83 pies	1.78 m
5.92 pies	1.80 m
6.00 pies	1.83 m

EL PESO IDEAL PARA HOMBRES DE 25 AÑOS DE EDAD O MÁS

COMPLEXIÓN PEQUEÑA		COMPLEXIÓN MEDIANA		COMPLEXIÓN GRANDE	
libras	**kg**	**libras**	**kg**	**libras**	**kg**
112 - 120	51 - 54	118 - 129	54 - 59	126 - 141	57 - 64
115 - 123	52 - 56	121 - 133	55 - 60	129 - 144	59 - 65
118 - 126	53 - 58	124 - 136	56 - 62	132 - 148	60 - 67
121 - 129	55 - 59	127 - 138	58 - 63	135 - 152	61 - 69
124 - 133	56 - 60	130 - 142	59 - 64	138 - 156	63 - 71
128 - 137	58 - 62	134 - 147	61 - 67	142 - 161	64 - 73
132 - 141	60 - 64	138 - 152	63 - 69	147 - 166	67 - 75
136 - 145	62 - 66	142 - 156	64 - 71	151 - 170	68 - 77
140 - 150	63 - 68	146 - 160	66 - 73	155 - 174	70 - 79
144 - 154	65 - 70	150 - 165	68 - 75	159 - 179	72 - 81
148 - 158	67 - 73	154 - 170	70 - 77	164 - 184	74 - 83
152 - 162	69 - 73	158 - 175	72 - 79	168 - 189	76 - 86
156 - 167	71 - 76	162 - 180	73 - 82	173 - 194	78 - 87
160 - 171	73 - 78	167 - 185	76 - 84	178 - 199	81 - 90
164 - 175	74 - 79	172 - 190	78 - 86	182 - 204	83 - 93

FUENTE: *Almanaque Mundial, 1982.*

Estatura



5.17 pies	1.57 m
5.25 pies	1.60 m
5.33 pies	1.63 m
5.42 pies	1.65 m
5.50 pies	1.68 m
5.58 pies	1.70 m
5.67 pies	1.73 m
5.75 pies	1.75 m
5.83 pies	1.78 m
5.92 pies	1.80 m
6.00 pies	1.83 m
6.08 pies	1.85 m
6.17 pies	1.88 m
6.25 pies	1.91 m
6.33 pies	1.93 m

2. Considera la siguiente regla para calcular el peso ideal de una persona de complexión media: “el número de kilogramos debe ser igual a tres quintos del número de centímetros menos 43 cm en el caso de las mujeres y 38 cm en caso de los hombres”. ¿Qué tan bien se ajusta esta regla a los datos de la tabla?

Crecimiento exponencial

El crecimiento es una característica de los seres vivos y de muchos fenómenos de la naturaleza y la sociedad, por lo que debe haber actividades para que los alumnos se acostumbren a las formas de medirlo y expresarlo, así como a los diversos modos de crecimiento que se presentan en el mundo real.

El incremento, o decremento, de una cantidad puede medirse en términos absolutos o relativos. Por ejemplo, la población de la República Mexicana pasó de 67 millones de habitantes en 1980 a 91.2 millones en 1995. Se dice entonces que, en términos absolutos, la población aumentó en 24.2 millones de habitantes y que, en términos relativos, la tasa de crecimiento decenal fue de 36.1%. Este porcentaje se obtiene dividiendo el incremento entre la población que le dio origen:

$$\frac{24.2}{67} = 0.361 = 36.1\%$$

Al estudiar el crecimiento de cantidades se presentan diversos casos, pero hay dos que resultan particularmente interesantes:

- El *crecimiento aritmético o lineal*, en el cual a tiempos iguales corresponden incrementos iguales de la cantidad. En este caso el crecimiento se expresa por una función lineal y su gráfica es una línea recta.

- El *crecimiento geométrico o exponencial*, en donde la tasa de crecimiento es la misma para intervalos iguales de tiempo. El ejemplo más típico es el crecimiento de poblaciones humanas, cuya tasa de crecimiento puede considerarse constante para periodos no muy largos de tiempo.

Así, si se denota por P_0 la población en un momento inicial dado, por p su tasa anual de crecimiento y por P_1, P_2, P_3... la población al cabo de 1, 2, 3, ... años, se puede ver que:

$$P_1 = (1 + p)\ P_0, \quad P_2 = (1 + p)^2\ P_{0,} \quad P_3 + (1 + p)^3\ P_0, \ldots$$

y al cabo de n años:

$$P_n = (1 + p)^n\ \ P_0$$

En general, si C es una cantidad que crece a una constante p por periodo de tiempo y se denotan por C_0 su valor inicial y por C_1, $C_{2,}$ C_3, ... su valor al cabo de 1, 2, 3,... periodos, se tiene que:

$$C_n = (1 + p)^n\, C_0, \ \text{ para } n = 1, 2, 3,...$$

Esta fórmula justifica el nombre de crecimiento exponencial para los fenómenos que crecen a tasa constante.

Respecto al estudio del crecimiento exponencial en la educación secundaria, hay dos cosas que deberán enfatizarse por medio de actividades y problemas. La primera es que los alumnos vean que las tasas de crecimiento no se suman, ya que, por ejemplo, una tasa de crecimiento de 10% seguida de otra de 15% no da en total un crecimiento de 25%, sino uno mayor. Para ello es necesario que comprendan que una tasa de crecimiento de 10% equivale a multiplicar por 1.10 y una de 15% equivale a multiplicar por 1.15, por lo que un crecimiento de 10% seguido de otro de 15% equivale a multiplicar por $1.10 \times 1.15 = 1.265$, esto es, a una tasa de crecimiento de 26.5%.

Por ejemplo

1. A principios del año una persona depositó $ 1 000 en un banco donde le pagan una tasa de interés variable. ¿Cuánto recibió a finales de junio si las tasas mensuales de interés fueron las indicadas en el siguiente cuadro? ¿Cuál fue la tasa de interés para todo el periodo enero-junio? (Puedes utilizar tu calculadora.)

	ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO
Tasa de interés	1.10	1.21	1.13	1.10	1.05	1.08

En segundo lugar, es importante que los alumnos tengan la oportunidad de explorar diversas situaciones donde intervenga el crecimiento exponencial. Las actividades deberán favorecer el uso de tablas y gráficas. En particular, es conveniente que se acostumbren al aspecto de las gráficas que revelan la existencia de este tipo de crecimiento.

2. El propietario de un local para oficinas ofrece dos planes de arrendamiento: $ 500 mensuales de renta más un aumento anual de $ 1 000, o bien $ 500 mensuales más 10% de aumento mensual. ¿Cuál es el más conveniente y en qué casos?

3. En el año de 1990 la población mundial de la Tierra era de 5 292 millones de habitantes. Suponiendo que la tasa decenal de crecimiento de la población es de 18.6% y se mantiene constante, ¿cuál será la población en los años 2010, 2020, 2030...?

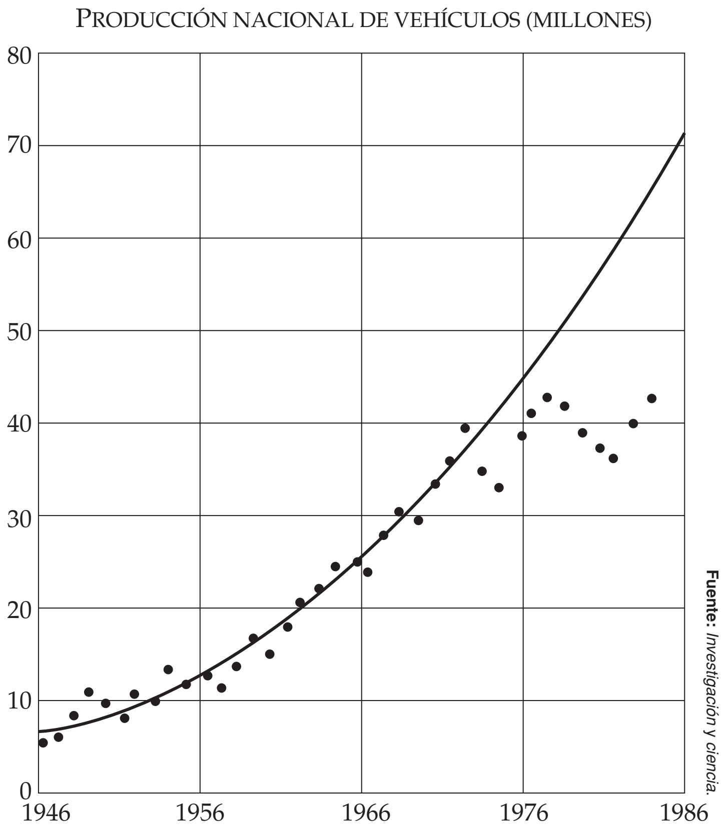
4. Un medio de cultivo fue infectado por N_0 bacterias. Las bacterias se reproducen cada dos horas. ¿Cuántas bacterias habrá 24 horas más tarde? ¿En qué momento se alcanzó la mitad de este número? ¿La cuarta parte?

5. Considera los siguientes datos:

- En un año pueden desarrollarse hasta cinco generaciones de polillas.
- Una polilla hembra deposita hasta 150 huevos en un año.
- Cada larva de polilla devora 20 mg de lana.

Suponiendo que mueren 2/3 de los huevos y que 50% de los que restan dan lugar a polillas hembra. ¿Cuál es la cantidad de lana devorada por los descendientes de una sola polilla hembra en un año?

6. La siguiente gráfica muestra la producción de vehículos automotores en todo el mundo desde finales de la Segunda Guerra Mundial hasta mediados de los años ochenta. Si se hubiera conservado la tendencia observada hasta principios de los años setenta, ¿cuál habría sido la producción estimada para los años 1975, 1976, ...,1985?



Estabilización de la producción mundial de vehículos, después de haber aumentado desde la Segunda Guerra Mundial. La línea de trazo continuo indica la tendencia desde 1946 hasta los primeros años de la década de los setenta. Si esta tendencia se hubiera mantenido, la producción habría alcanzado la cifra de 70 millones de automóviles y camiones por año: en la actualidad dicha cantidad se cifra en 42 millones de unidades. Para la fabricación de estos vehículos se emplearon 56 millones de toneladas de materiales.

Nociones de probabilidad

- ¿Por qué es importante el estudio de la probabilidad?
- El estudio de las nociones de probabilidad en la educación secundaria
- La noción de azar. La distinción entre experiencias aleatorias y deterministas
- Uso de diagramas de árbol y la regla del producto
- Las nociones clásica y frecuencial de la probabilidad
- Actividades de simulación
- Cálculos con probabilidades

Nociones de probabilidad

¿Por qué es importante el estudio de la probabilidad?

La probabilidad permite construir modelos, desarrollar procedimientos para calcular y estimar probabilidades y resolver problemas en situaciones donde interviene el azar o hay incertidumbre. Su importancia es creciente en diversas áreas: en ciencias básicas como la física, la química y la biología, los modelos probabilísticos han favorecido una mayor comprensión de los fenómenos de la naturaleza. En actividades prácticas tan diferentes como son el control de calidad en la industria, la predicción del clima en meteorología, el estudio de la propagación de epidemias en el ámbito de la salud pública, el diseño y la interpretación de encuestas —que interesa también a sectores como la mercadotecnia y la política— tanto la probabilidad como el área relacionada de la estadística sirven para interpretar información, hacer predicciones, y tomar decisiones racionales en situaciones de incertidumbre.

No es entonces una exageración afirmar que conocer algunos elementos de probabilidad y tener cierta familiaridad con el razonamiento probabilístico, es necesario no sólo para el especialista, sino para ser un ciudadano informado.

Las consideraciones anteriores justificarían por sí solas la inclusión de las nociones de la probabilidad en la educación secundaria, pero hay otras razones que hacen de ésta un área interesante para los educadores y en particular para los profesores de matemáticas:

- No obstante que la probabilidad es una de las ramas de las matemáticas de más desarrollo en la actualidad, muchas de sus ideas fundamentales son accesibles sin prerrequisitos complicados.

- La probabilidad es rica en problemas interesantes en sí mismos, que pueden despertar o incrementar el gusto por el estudio de las matemáticas en los alumnos.

- Los conceptos de la teoría elemental de la probabilidad son ricos en resonancias intuitivas. Cotidianamente tenemos que valorar y tomar decisiones en circunstancias donde hay incertidumbre o interviene el azar. Gracias a ello desarrollamos ciertas intuiciones acerca de los fenómenos probabilísticos y, aunque estas intuiciones son con frecuencia inexactas o se apoyan en concepciones no siempre correctas, proporcionan al educador un excelente comienzo para afinarlas y acercarse gradualmente a formulaciones matemáticas más precisas.

- La probabilidad constituye un contexto donde pueden aplicarse con sentido conceptos y técnicas matemáticas elementales, relacionados con las fracciones, las cifras de porcentajes, el razonamiento proporcional y la simbolización algebraica. La probabilidad tiene, por lo tanto, valor para adquirir, reforzar y profundizar en la comprensión de nociones y procedimientos pertenecientes a otras partes de las matemáticas, siempre y cuando éstos no sean vistos rígidamente como prerrequisitos para comprenderla.

- El estudio de la probabilidad se presta para lograr un ambiente de estudio participativo. Los alumnos pueden abordar algunos problemas por medio de la exploración empírica de situaciones aleatorias. Podrán entonces formular hipótesis, contrastar sus expectativas con los resultados que se presentan experimentalmente, y producir y discutir sus propias explicaciones. Dichas explicaciones ayudan al desarrollo de las nociones matemáticas y, en todo caso, constituyen un terreno fértil para que el profesor enriquezca sus actividades de enseñanza.

Lectura

Pascal, Fermat y el Caballero de la Meré
Los inicios de la probabilidad

El nacimiento de la probabilidad está asociado a los nombres de Blais Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665). Al parecer, el Caballero de la Meré, un hombre culto aficionado a los juegos de azar, planteó ciertos problemas de juego a Pascal y éste a su vez los discutió con Fermat por correspondencia en el año de 1654. El siguiente problema fue conocido como el "problema de los puntos" o "de la división de la apuesta".

Dos personas compiten en un juego hasta completar un cierto número de puntos. Cada una tiene la misma oportunidad de hacer un punto; aquél que los complete primero se lleva la totalidad de la apuesta. Si el juego tiene que interrumpirse antes de que ningún jugador complete los puntos, ¿cómo debe dividirse la apuesta?

Por ejemplo, supongamos que dos personas, llamémosles A y B, juegan a los volados. Si sale águila, A gana un punto; si sale sol, B gana un punto; juegan varios volados y el que complete primero tres puntos gana una apuesta de 64 pesos. Pero cuando A lleva dos puntos y B lleva un punto, el juego se interrumpe. ¿Cómo debe dividirse la apuesta?

Ha de descartarse la solución inmediata que dice "que se reparta mitad y mitad", porque de seguro A protestaría, pues lleva ventaja y quisiera que se le compensara esta ventaja dándole una mayor parte de la apuesta.
No vale tampoco la otra solución inmediata que sugiere repartir la apuesta en partes proporcionales a los puntos acumulados, es decir: *2/3 de la apuesta*

para A, porque lleva 2 puntos y 1/3 de la apuesta para B porque lleva 1. Esta es la“solución” que proponía el Caballero de la Meré, pero tanto Pascal como Fermat estuvieron de acuerdo en que no era correcta. Para darse cuenta de ello sólo piénsese que dicha “solución” no depende del número de puntos que deben acumularse para ganar la apuesta.

En una carta a Fermat, fechada el 29 de julio, Pascal comenta el método encontrado por él, resolviendo justamente el caso expuesto en el ejemplo de arriba: supongamos que se juega el siguiente punto, puede suceder alguna de dos cosas: o gana A o gana B. Si gana A, entonces completaría 3 puntos y se llevaría toda la apuesta. Si gana B, entonces tanto A como B llevarían 2 puntos y la apuesta debería dividirse en partes iguales (mitad y mitad). Entonces A razona así: *Yo estoy seguro de obtener (al menos) la mitad de la apuesta (es decir 32), pues aun si perdiera el siguiente punto la obtendría; pero la otra mitad quizá me la lleve yo, quizá tú o ambos con las mismas oportunidades. Entonces, dividamos esta mitad entre ambos y dame además la mitad que ya tengo asegurada.* Así, A reclama para sí tres cuartas partes de la apuesta (1/4 + 1/2 = 3/4, es decir, 48 pesos) y una cuarta parte para B (es decir 16 pesos).

La solución de Fermat es la siguiente: *Se debe observar que a lo más en dos tiradas más se decidiría el juego. Supongamos que necesariamente se juegan esos dos puntos; señalemos con "a" cuando el punto lo gana A y con "b" cuando lo gana B. Todos los posibles desarrollos del juego son los siguientes: "aa", "ab", "ba", "bb" de ellos en 3 casos ganaría A y sólo en un caso ganaría B; de donde la fracción de la apuesta que se debe llevar A es 3/4; es decir, 48 pesos para A y 16 para B.*

1. Resolver el problema de la división de la apuesta cuando A y B juegan a 4 puntos una apuesta de 64 pesos y el juego se interrumpe cuando A lleva 3 puntos y B sólo 1.

Blaise Pascal

Pierre de Fermat

El estudio de las nociones de probabilidad en la educación secundaria

Los contenidos de nociones de probabilidad de los programas de educación secundaria, más que intentar abarcar un amplio repertorio de definiciones, fórmulas y procedimientos para calcular probabilidades, están centrados en un conjunto pequeño de ideas fundamentales, que se desarrollan a lo largo de los tres grados:

- La idea de azar y la distinción entre experiencias aleatorias y deterministas.
- El uso de diagramas de árbol y arreglos rectangulares —así como de otras técnicas sencillas de conteo— para enumerar casos.
- Las nociones frecuencial y clásica de la probabilidad.
- La idea de simulación y el modelo de urna.
- Propiedades simples de la probabilidad: eventos complementarios; eventos mutuamente excluyentes y la regla de la suma; eventos independientes y la regla del producto de probabilidades.

Los programas están diseñados de manera que las ideas anteriores puedan abordarse a lo largo de toda la secundaria, a diferentes niveles de profundidad y abstracción. Puede decirse que aparecen reiteradamente durante los tres grados en una especie de recorrido en espiral, que se apoya primero en la comprensión informal de relaciones concretas y progresa gradualmente hacia formulaciones cada vez más precisas y elaboradas.

Dentro del cuerpo de conocimiento de las matemáticas es posible desarrollar la probabilidad como un sistema axiomático-deductivo, en el cual las ideas fundamentales enlistadas antes no son sino aplicaciones o casos particulares de desarrollos más generales y abstractos. Aunque tal enfoque es de una impecable consistencia lógica y de una gran elegancia matemática, requiere de una considerable madurez para su tratamiento y, ciertamente, no es recomendable para un primer acercamiento a la probabilidad.

Para los alumnos de secundaria, lo razonable es un estudio de esta disciplina que se desarrolle a partir de consideraciones intuitivas. Conviene no enfocarse desde el principio a establecer fórmulas y realizar cálculos complicados; por el contrario, será mejor favorecer la comprensión de las nociones básicas de la probabilidad.

Es recomendable que la simbolización y la formulación explícita de las propiedades matemáticas se lleve a cabo en forma paulatina, como una manera de sintetizar la expresión de los conceptos y facilitar el acceso a los procedimientos sobre la base de una comprensión y una experiencia desarrolladas con anterioridad.

No debe olvidarse que es a lo largo de toda la secundaria cuando se espera que el alumno consolide los conocimientos aritméticos adquiridos en la escuela primaria, los reconsidere desde un punto de vista más avanzado, y las generalice al tiempo que adquiere los conceptos y las habilidades algebraicas básicas. Por lo tanto, resultaría absurdo intentar en la probabilidad un estilo de presentación formal que presuponga una fluidez todavía no alcanzada en el manejo de la aritmética y la simbolización algebraica.

Pierre Simon de Laplace (1749-1827), un gran matemático francés y pionero de la probabilidad, afirmaba que esta disciplina es, en el fondo, "sentido común reducido a cálculos". Esta idea puede interpretarse como un proceso donde las primeras apreciaciones probabilistas de los alumnos se transforman en conceptos y enunciados cada vez más precisos, a los cuales será luego posible aplicarles el poder analítico de las matemáticas.

La anterior interpretación del aforismo de Laplace encierra un consejo didáctico: en el estudio elemental de la probabilidad puede tomarse como punto de partida el examen de situaciones y problemas donde interviene el azar para:

Uno, conseguir la comprensión de ejemplos concretos.

Dos, explicitar en forma gradual las nociones y propiedades básicas de la probabilidad.

Tres, culminar con las formulaciones cuantitativas y su expresión simbólica.

La noción de azar. La distinción entre experiencias aleatorias y deterministas

El reconocimiento de que existen eventos de cuya ocurrencia no tenemos certidumbre, así como la idea de que algunos eventos tienen mayores oportunidades de ocurrir que otros, surgen de manera natural de las experiencias de la vida cotidiana e incluso dan lugar a formas rudimentarias, por lo general cualitativas, de razonamiento probabilístico. Sin embargo, precisar dichas nociones y cuantificar probabilidades correctamente es un proceso que no aparece de manera espontánea y requiere el apoyo del profesor.

Las siguientes son actividades de aprendizaje para la clase, a partir de las cuales puede iniciarse el estudio de la probabilidad. A la par de las experiencias sugeridas podrán discutirse la idea de azar y la diferencia entre experiencias aleatorias y deterministas, así como establecer gradualmente el vocabulario básico de la probabilidad. Será conveniente retomar muchas de las experiencias sugeridas a medida que se estudien los diferentes temas de probabilidad, pues así se propiciará el desarrollo de las ideas fundamentales.

Es recomendable no relegar las actividades de probabilidad a un solo momento del curso de matemáticas. Como ya se dijo antes, estas actividades constituyen un excelente contexto para practicar e incluso dar sentido a ideas y procedimientos importantes de otras partes de las matemáticas, por lo que muchas de ellas podrían intercalarse mientras se estudian otros temas, a lo largo de todo el año escolar.

El lenguaje del azar

Podrá pedirse de tarea a los alumnos que busquen en periódicos o revistas ejemplos de frases que se utilicen en situaciones que encierran un mayor o menor grado de incertidumbre. En dichas frases, aparecerán términos y expresiones como:

indudablemente
es posible
hay buenas oportunidades
es casi imposible

a) Describe su significado con tus propias palabras. Si hay algunos términos que no conozcas, búscalos en un diccionario.

b) Compara los términos que encontraste con los que encontraron tus compañeros. ¿Hay algunos que tú no hayas encontrado? ¿Cuál es su significado?

c) En tu lista de términos y expresiones, ¿hay algunos que quieran decir lo mismo? (por ejemplo las expresiones "sin duda" y "es seguro" tienen el mismo significado).

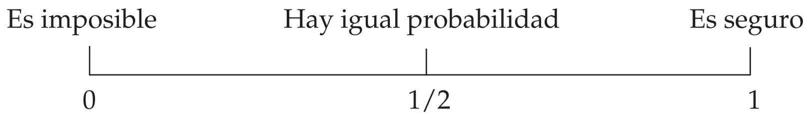
d) ¿Puedes ordenar los términos y expresiones de tu lista según la confianza que manifiestan de que ocurrirá algo? Por ejemplo:

es imposible
es casi imposible
.
.
.
es seguro

e) Inventa frases que utilicen, de manera realista, los términos del listado que elaboraste.

La escala de la probabilidad

Considera que tienes una escala de 0 a 1, como en la figura siguiente, en la cual se asigna un número a algunas expresiones relacionadas con el azar. ¿Cómo ubicarías en esta escala los términos que ordenaste en el inciso *d)*?



Una de las ideas fundamentales de la probabilidad es que las nociones intuitivas acerca del azar, que en el lenguaje cotidiano se expresan en frases como *se espera que*, *hay igual probabilidad*, *es bastante probable*,… se normen dentro de una teoría matemática, de tal manera que los eventos imposibles tengan probabilidad 0, los eventos seguros probabilidad 1 y se asigne valores entre 0 y 1 a las probabilidades de los otros eventos. También se espera que la relación *"más probable" que* se traduzca en la relación *"mayor que"* entre los números que expresan las probabilidades de los eventos.

En la secundaria se explorarán algunas formas de establecer tal correspondencia, a saber: si quiere verse dónde colocar determinado evento en "la escala de la probabilidad", se intenta estimar cuántas veces se verificará el suceso en un número determinado de pruebas, ya sea razonando *a priori* (utilizando la fórmula clásica de la probabilidad), o considerando la frecuencia relativa con la que el evento aparece al realizar efectivamente varios experimentos o ensayos (utilizando la noción frecuencial de la probabilidad).

Muchos maestros prefieren hablar de la "escala de la probabilidad" sólo hasta después de haber desarrollado, aunque sea parcialmente, el cálculo *a priori* y la estimación frecuencial de probabilidades. A otros, en cambio, les gusta que los estudiantes expresen ideas intuitivas en actividades como la anterior, y ver de qué manera dichas ideas pueden servir de base, anticipar o incluso señalar la necesidad de conceptos que serán desarrollados más adelante.

Experimentos aleatorios

Mediante experimentos como el lanzamiento de dados, series de volados, giro de ruletas, extracción de urnas y muestreo en poblaciones finitas (de hecho pequeñas) conocidas, podrá esclarecerse la noción de experiencia aleatoria, explorar el carácter imprevisible del azar en ocurrencias individuales de eventos y observar la aparición de regularidades en experimentos repetidos. Así, se plantean situaciones en las que es o no plausible la equiprobabilidad de los eventos, se realizan experiencias aleatorias equivalentes y se preparan las ideas de simulación que se verán más tarde. Al mismo tiempo se desarrollan nociones que serán útiles cuando se estudien la fórmula clásica y la noción frecuencial de la probabilidad.

Por ejemplo

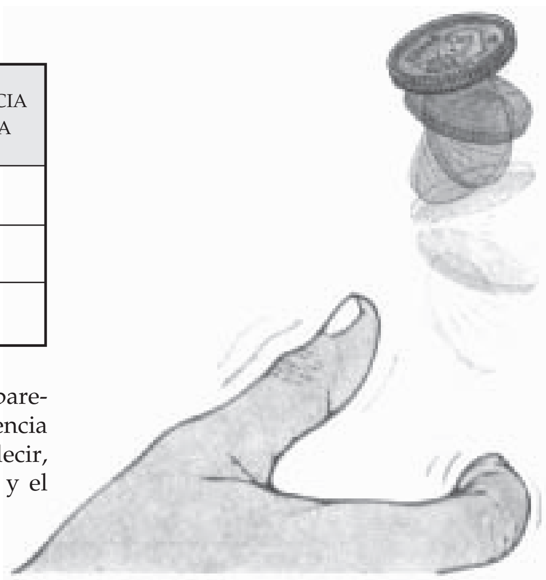
1. Efectúa 10 series de 10 volados cada una y registra los resultados en la siguiente tabla. De acuerdo con tu tabla, ¿son iguales las probabilidades de obtener águila y de obtener sol al realizar un volado?

SERIE	RESULTADOS	NÚM. DE ÁGUILAS	% DE ÁGUILAS
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Total			

2. Arroja dos monedas 50 veces. Registra los resultados en una tabla como la que sigue. De acuerdo con tu tabla, los resultados: 2 águilas, 2 soles, un águila y un sol, ¿tienen las mismas oportunidades de ocurrir? ¿Puedes explicar por qué sí o por qué no?

RESULTADO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
2 águilas		
2 soles		
águila y sol		

La *frecuencia absoluta* es el número de veces que aparece un resultado. La *frecuencia relativa* es la frecuencia dividida entre el total de ensayos realizados, es decir, la razón entre la frecuencia de cada resultado y el número de sus ensayos.



El profesor podrá proponer diversas variantes para hacer las actividades más amenas e interesantes. Por ejemplo, los alumnos podrán fabricar sus propias "máquinas del azar" para realizar experiencias aleatorias, como son dados de cartón de diferentes formas (utilizando los desarrollos de los sólidos regulares que suelen dejarse de tarea en las actividades de geometría); dados sesgados, ya sea repitiendo algún número en las diferentes caras, pegándole un poco de plastilina en el interior de alguna cara para desbalancear el dado, o dándoles formas asimétricas. También podrán hacerse ruletas con círculos de cartón, usando una chinche o tachuela como eje; o usar tarjetas o papelitos para extraer de una caja, etcétera.

Es necesario, sin embargo, señalar que el valor de la actividad depende de la manera como se capitaliza la reflexión alrededor de los resultados de la experiencia. Por ello es importante que los alumnos registren los resultados de los experimentos realizados y se planteen preguntas que los conduzcan a reflexionar sobre los mismos.

Muestreo en clase

1. Cada alumno de la clase prepara una ficha (una tarjeta) con los siguientes datos:

Sexo: ____________________

Edad: ____________________

Color del pelo: ____________________

Color de los ojos: ____________________

Peso: ____________________

Estatura: ____________________

Núm. de hermanos: ____________________

Se prepara en el pizarrón una tabla con el recuento de las características anteriores. ¿Qué es más probable, que un alumno tomado al azar de la clase sea hombre o sea mujer? ¿Es más probable que sea "güero" o moreno?, etcétera.

Las fichas pueden utilizarse para hacer repetidas selecciones aleatorias, ya sea mediante extracciones de una caja, o barajándolas, de manera que se puedan confrontar los resultados con las expectativas obtenidas a partir de la tabla.

Como en las situaciones anteriores, el profesor podrá proponer a sus alumnos las variantes que juzgue convenientes. Adviértase, sin embargo, que a diferencia de los problemas generados a partir de dados, volados, etcétera, las características de las muestras en situaciones como la anterior no son fácilmente abordables por medio de un análisis *a priori* de las posibilidades. Tienen que tratarse en forma empírica.

Juegos de probabilidad

Algunos de los juegos que se presentan a continuación tienen en principio los mismos propósitos que la realización repetida de experiencias aleatorias como las descritas en páginas anteriores. La principal diferencia consiste en que los alumnos encuentren en el juego mismo la motivación para tratar de descubrir, por ejemplo, si el juego es o no parejo para todos los participantes. Se recomienda al profesor reflexionar sobre las actividades que se ofrecen en seguida, ya que pueden darle ideas para establecer variables didácticas muy ricas y estructuradas, y al mismo tiempo flexibles y divertidas.

1. El juego del disparejo

Puede distribuirse a los alumnos en parejas para pedirles que realicen el siguiente juego y registren los resultados. Se arrojan tres monedas. Al mismo tiempo el estudiante A gana si se obtiene "un disparejo", es decir, si las tres monedas caen mostrando águilas y soles. El estudiante B gana en caso contrario, esto es, si las tres monedas muestran sólo águilas o sólo soles al caer.

Después de que los alumnos hayan jugado varios disparejos, así como registrado y discutido los resultados, puede analizarse la situación utilizando, por ejemplo, un diagrama de árbol para enumerar las distintas posibilidades. Evidentemente en este caso el juego no es parejo, ya que las probabilidades favorecen al jugador A. ¿Hay concordancia entre los resultados experimentales y el análisis?

Lectura

Una hoja de registro

La hoja de registro que aparece a la derecha podrá servir al profesor para que sus alumnos lleven el registro de los resultados de juegos y experiencias aleatorias y visualicen cómo a medida que aumenta el número de experimentos, la frecuencia de un evento se acerca a su probabilidad.

Por ejemplo, podemos llenar una bolsa con tres canicas rojas y tres blancas y luego realizar el experimento de tomar al azar canicas de la bolsa, devolviendo cada vez la canica que se extrae antes de la siguiente extracción. Los alumnos utilizarán la hoja de registro de la siguiente manera: Comenzando en el punto de partida, se dibujará una línea de color que irá al siguiente punto a la derecha si sale canica roja y al siguiente punto a la izquierda si sale blanca y así hasta terminar.

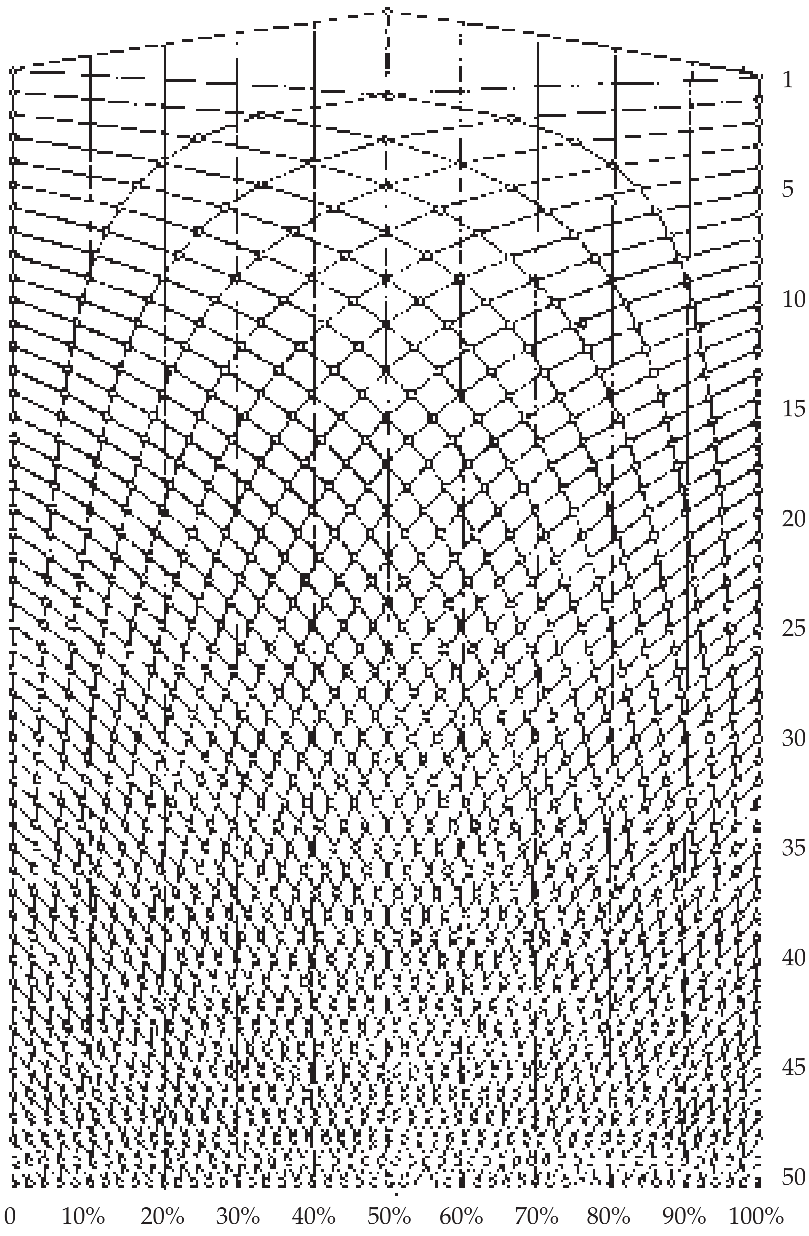
Los alumnos se darán cuenta que a la larga los porcentajes de canicas blancas y rojas se aproximan a 50%. Conviene que la experiencia se repita varias veces para que los alumnos vean que independientemente de los caminos que se sigan, éstos siempre se acercan a 50%.

El mismo experimento podrá realizarse modificando la composición de la bolsa, por ejemplo, poniendo dos canicas blancas y tres rojas, o una blanca y cuatro rojas, etcétera.

También convendrá realizar la actividad inversa. El profesor llena la bolsa con cinco canicas, pero no dice a los alumnos cuántas canicas de cada color puso.

Luego los alumnos extraen canicas al azar, y a partir de los resultados del registro, intentan adivinar cuántas canicas de cada color hay dentro de la bolsa.

Punto de partida



2. Carreras con dados

Una actividad interesante es el juego “Carreras con dados”. En dicho juego se tienen 15 corredores (por ejemplo, frijolitos en un papel cuadriculado) numerados: corredor 1, corredor 2, ... así hasta el corredor 15.

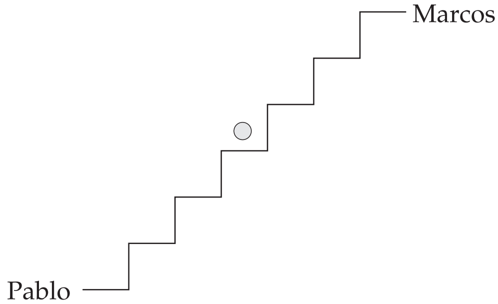
Para determinar qué corredor avanza se lanzan dos dados y se suman los puntos que aparecen en cada dado. Si, por ejemplo, en un dado sale 4 y en el otro 3, entonces el corredor 7 avanza una casilla en la pista de carreras. En forma similar, si salen un 2 y un 6, avanza el corredor 8, etcétera.

Antes de jugar la carrera, el alumno escoge a su corredor favorito. Como en el problema anterior, después de que la clase ha terminado de jugar se busca una explicación racional de los resultados, analizando las oportunidades de avanzar de los distintos corredores. De hecho, “Carreras con dados” es una actividad rica dentro del repertorio de actividades para iniciar la discusión de la probabilidad.

Pista de carreras

Corredor															Meta
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															

3. El juego de las escaleras



Se dibuja una escalera
y se coloca una ficha en el centro.

Dos jugadores escogen el pie o la cima de la escalera. Se lanza un volado; si sale águila la ficha sube un escalón, si sale sol la ficha baja un escalón. Se continúa hasta que la ficha llega al pie o a la cima de la escalera y gana uno de los jugadores. □

A partir del juego conviene realizar un análisis, ya que sólo jugando y experimentado los alumnos no producen espontáneamente todos los conceptos matemáticos. Experimentos y juegos proporcionan experiencias y ayudan a generar intuiciones, sobre las que hay que reflexionar. Es a partir de dicha reflexión, en cuya conducción y organización el profesor juega un papel crucial, que los estudiantes podrán acercarse y comprender las nociones matemáticas.

Uso de diagramas de árbol y la regla del producto

Determinar *a priori* la probabilidad en experimentos simples, como son arrojar una moneda, un dado, o extraer al azar canicas de una bolsa cuyo contenido se conoce, no es complicado, pues en situaciones como éstas es fácil comparar los casos favorables y los casos posibles. Pero problemas como determinar la probabilidad de que al tirar tres dados salgan exactamente dos cincos, o calcular la probabilidad de obtener al menos dos soles al lanzar cinco volados, ya no son tan sencillos.

La dificultad reside en enumerar y contar, primero, los resultados posibles y luego, los casos favorables al evento que interesa. Aun cuando para realizar dichos conteos la probabilidad se auxilia de la rama de las matemáticas llamada *Combinatoria*, parte del razonamiento probabilístico tiene precisamente el propósito evitar complicaciones combinatorias. Para el profesor de secundaria, se recomienda:

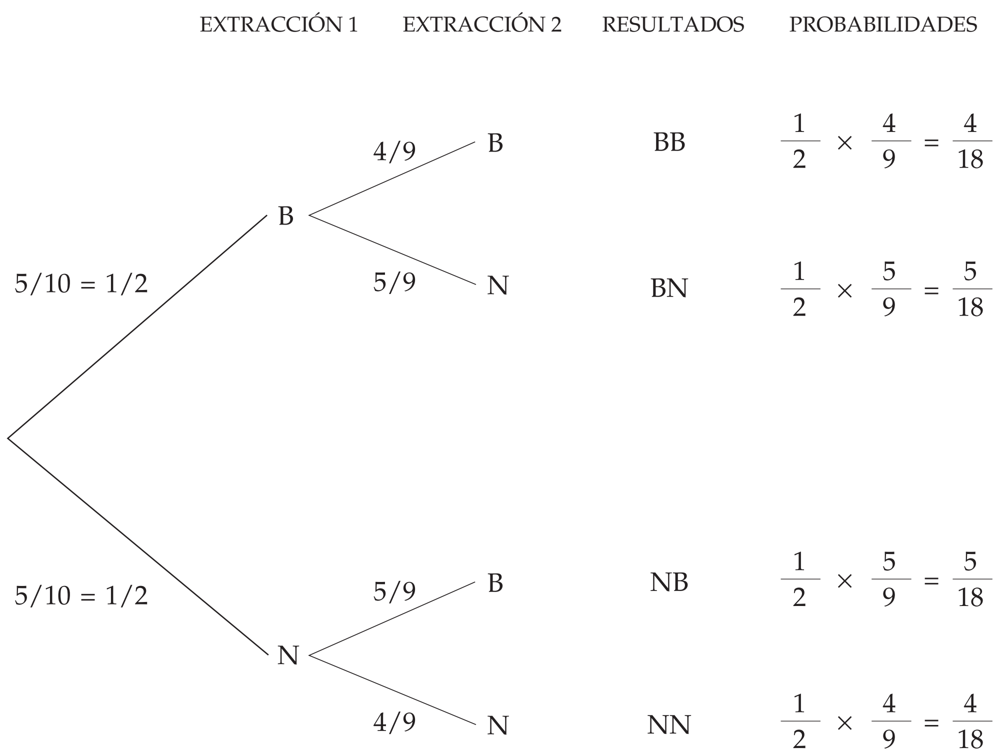
- Utilizar, en la medida de lo posible, técnicas sencillas e intuitivas de conteo, como son los diagramas de árbol y las tablas.

- Introducir, si se juzga pertinente, pequeños problemas de permutaciones o combinaciones, pero no tratar de enseñar prematuramente las fórmulas correspondientes.

- Resaltar la lógica subyacente en el cálculo de las probabilidades de eventos complejos. Aplicar juiciosamente propiedades de la probabilidad, permite con frecuencia evitar complicaciones combinatorias.

Los diagramas de árbol no sólo facilitan la tarea de enumerar los resultados que pueden presentarse al realizar una experiencia aleatoria, sino que proporcionan una imagen visual de los distintos desarrollos posibles de la experiencia y preparan a los alumnos para acceder a las nociones de independencia y regla del producto. Para ello es importante que se acostumbren gradualmente a escribir en cada rama las probabilidades de transición correspondientes, tal y como se hace en el ejemplo siguiente.

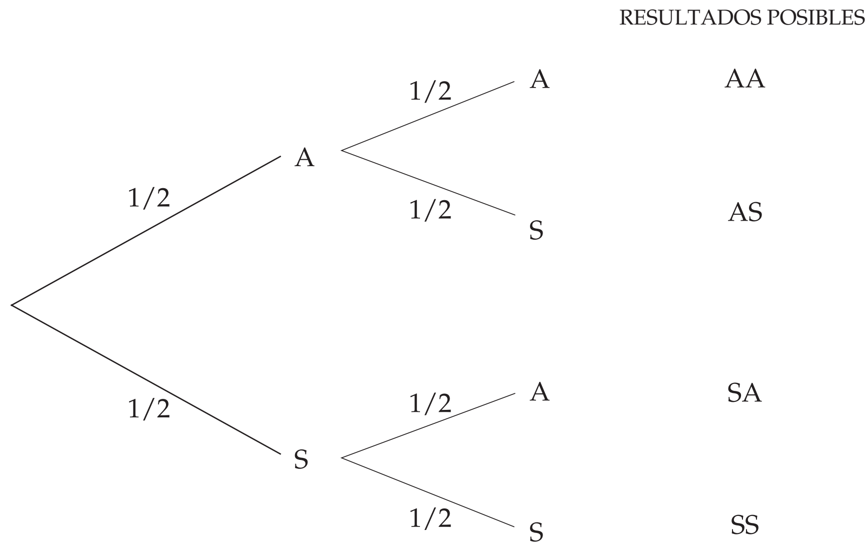
1. Tenemos cinco canicas blancas y cinco negras en una caja (bolsa, urna, etcétera). Extraemos al azar una canica de la caja y la dejamos de lado, luego extraemos una segunda canica también al azar. ¿Cuáles son las probabilidades de los diferentes resultados que pueden presentarse?



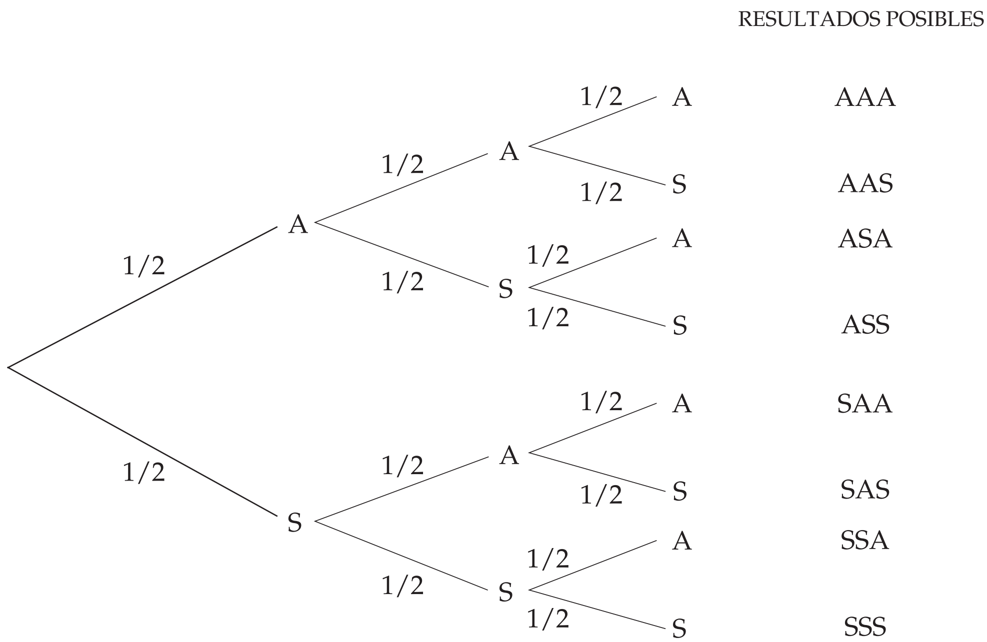
2. Dentro de un grupo de cinco niñas y tres varones se van a rifar dos boletos para ir a una función de cine. ¿Cuál es la probabilidad de que los boletos los ganen dos niñas? ¿Dos varones? ¿Una pareja formada por una niña y un varón?

3. Determinar la probabilidad de que en una serie de volados consecutivos se obtengan sólo águilas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener sólo águilas en dos volados consecutivos? ¿En tres volados consecutivos?, y así sucesivamente.

En una serie de dos volados, hay cuatro resultados posibles:



Y en una serie de tres volados hay ocho resultados posibles:



Entonces, las probabilidades de obtener sólo águilas son 1/4 en una serie de dos volados y 1/8 en una serie de tres volados.

Para series de más volados, la enumeración de todas las posibilidades resulta poco práctica, si bien los árboles anteriores muestran el patrón que seguirá el proceso. Si se tira una moneda, en el primer lanzamiento se tiene un probabilidad de 1/2 de obtener águila, es decir, la mitad de las posibilidades corresponden a águila. Ahora bien, si se efectúa un segundo lanzamiento, también en éste la mitad de las posibilidades corresponden a águila. De manera que la probabilidad de que salga águila tanto en el primero como en el segundo volados viene dada por la mitad de la mitad de las posibilidades, o sea que la probabilidad es:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Si se efectúa un tercer lanzamiento, la probabilidad de que se obtenga águila en el primero, el segundo y el tercer lanzamiento viene dada por la mitad de la mitad de la mitad de las posibilidades, esto es:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Y así sucesivamente.

PROBABILIDADES DE OBTENER SÓLO ÁGUILAS EN *n* VOLADOS CONSECUTIVOS

n	CASOS POSIBLES	PROBABILIDAD DE OBTENER SÓLO ÁGUILAS
1	2	1/2
2	2 × 2 = 4	1/4
3	2 × 2 × 2 = 8	1/8
4	2 × 2 × 2 × 2 = 16	1/16
5	2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 32	1/32
6	2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 64	1/64
7	2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 128	1/128
8	2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 256	1/256
9	2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 512	1/512
10	2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 1024	1/1024

En general, la probabilidad de obtener sólo águilas en una serie de n volados está dada por:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2}}_{n \text{ veces}} = \frac{1}{2^n}$$

Las nociones clásica y frecuencial de la probabilidad

La fórmula clásica de la probabilidad

1. Imaginemos una bolsa opaca, con 20 canicas iguales en todos aspectos, salvo en el color: 15 de ellas son blancas y 5 rojas. Si se agita la bolsa de tal manera que se mezclen bien las canicas y, sin mirar adentro de la bolsa, se toma al azar una canica, ¿qué color de canica saldrá?

No podemos estar seguros del color de la canica, ya que el resultado del experimento anterior depende del azar. Sin embargo, suponiendo que se apuesta a favor de un color antes de sacar la canica y se trata de hacerlo de manera racional y no confiando meramente en la suerte, el problema consiste entonces en determinar cuál de los dos colores tiene mayores posibilidades de ser escogido.

No obstante su simplicidad, el anterior es un buen ejemplo de problema probabilístico. Se tiene, para comenzar, una experiencia aleatoria, es decir, una experiencia que no necesariamente produce siempre el mismo resultado cada vez que se repite en las mismas condiciones. La experiencia consiste en poner 15 canicas blancas y 5 rojas en una bolsa, y extraer luego una canica al azar. El problema consiste en determinar cuál de los eventos —"extraer una canica blanca" o bien "extraer una canica roja"— es más probable. En este caso la solución al problema es muy sencilla. Ya que son 15 canicas blancas contra 5 rojas, hay más posibilidades de escoger una canica blanca que de escoger una roja, es decir, es mayor la probabilidad de escoger una canica blanca. De hecho, dado que en la bolsa 15 de un total de 20 canicas son blancas, esto es 3/4 partes del contenido de la bolsa son blancas, la probabilidad de sacar una canica blanca es 3/4, 0.75 o 75%, según exprese como una fracción, un decimal o en forma de porcentaje.

El problema anterior condujo finalmente a una consideración de la forma: tal evento tiene n formas de ocurrir sobre un total de N posibilidades. Después, para comparar los tamaños relativos de n y N y obtener así la probabilidad buscada, nos fijamos en la razón n/N. Dicho cociente, con algunas precisiones que se explicitarán a continuación, se conoce como la *Fórmula clásica de la probabilidad*.

FÓRMULA CLÁSICA DE LA PROBABILIDAD

Se realiza una experiencia aleatoria. Para calcular la probabilidad P(A) de un evento o resultado posible A que interesa, uno se pregunta:

1) ¿Son todos los resultados igualmente probables?

2) ¿Cuál es el número total N de resultados posibles?

3) ¿Cuál es el número n de resultados que corresponden o son favorables al evento que nos interesa?

Entonces, si todos los resultados son igualmente probables, la probabilidad se obtiene calculando el cociente:

$$P(A) = \frac{\text{Números de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

Que también se expresa de la siguiente manera:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Parece muy simple, pero existen varias sutilezas. Primeramente, tomar el cociente para comparar el número de casos favorables contra el número de casos posibles, es natural sólo cuando se está familiarizado con el razonamiento en términos de proporciones.

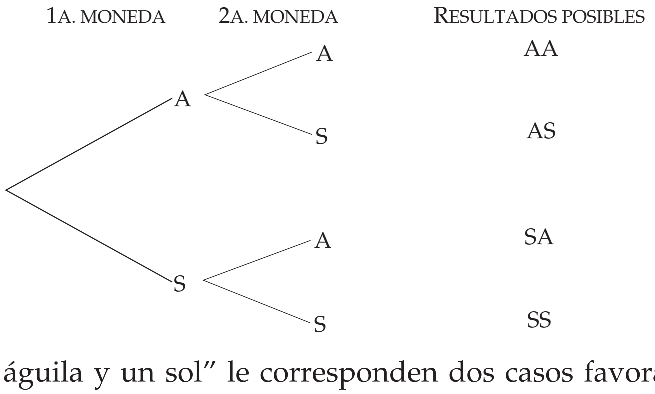
En segundo lugar, se requiere que los N casos o resultados posibles de la experiencia aleatoria tengan las mismas oportunidades de ocurrir o, en términos matemáticos, que sean *equiprobables*.

Por ejemplo

1. Determine la probabilidad de que al lanzar dos monedas al mismo tiempo caigan mostrando caras diferentes: una águila y la otra sol. Se tienen entonces las siguientes posibilidades:

dos águilas
dos soles
un águila y un sol

Según la fórmula clásica, existe un caso favorable de tres posibilidades, por lo que la probabilidad buscada es 1/3. No obstante este análisis es erróneo, pues los tres eventos enlistados no son equiprobables. Si denotamos águila con A y sol con S, se podría ver que en realidad se tienen las siguientes posibilidades:



Al evento "un águila y un sol" le corresponden dos casos favorables de cuatro posibles, por lo que su probabilidad es 2/4 = 1/2 y no 1/3.

Lectura

Cómo equivocarse utilizando la fórmula clásica de la probabilidad

La fórmula clásica de la probabilidad es tan natural que mucha gente la emplea en situaciones donde no puede utilizarse. Ya señalamos que el uso de esta fórmula requiere que los resultados de la experiencia aleatoria donde se aplica sean finitos y equiprobables. A continuación exponemos un problema donde las personas no logran, con frecuencia, hacerse una representación correcta de la situación, lo cual las lleva, equivocadamente, a intentar aplicar esta fórmula.

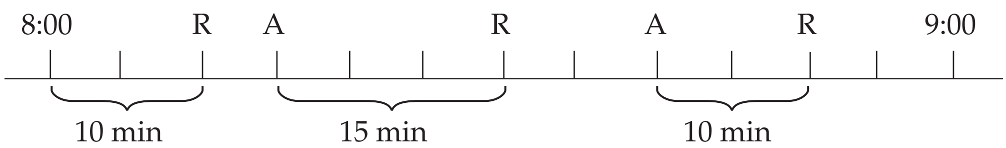
1. *De Culiacán a Navolato parten autobuses rojos y azules. Tanto el primer autobús rojo como el primero azul salen a las 6:10 a. m. y luego sale un autobús rojo cada 20 minutos y uno azul cada 25 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que un pasajero con destino a Navolato, que llega a la central entre las 8:00 y las 9:00 a.m., aborde un autobús rojo?*

Para resolver este problema no es raro que las personas hagan primero la lista de los autobuses que salen a Navolato entre las ocho y las nueve de la mañana:

ROJOS	AZULES
8:10	8:15
8:30	8:40
8:50	

Luego razonan en la siguiente forma: *Como hay cinco posibilidades y los autobuses rojos representan tres de ellas, entonces la probabilidad de tomar uno rojo es 3/5 = 0.60 = 60%.*

Parece muy razonable, pero la respuesta es incorrecta. Para verlo, representemos el intervalo entre las 8:00 a.m y 9:00 a.m. y localicemos en él las horas a las que pasa cada autobús. (R representa un autobús rojo y A uno azul).



En la figura están señalados aquellos intervalos de tiempo favorables a que el pasajero tome un autobús rojo. Puede verse que esto ocurre si llega entre las 8:00 y las 8:10, entre las 8:15 y las 8:30 o entre las 8:40 y las 8:50. Sumando la longitud total de estos intervalos y dividiendo entre los 60 minutos que componen una hora, se llega a:

$$\text{Probabilidad de abordar un rojo} = \frac{35}{60} = 0.58... = 58\%$$

que como vemos, es un resultado distinto del que se obtiene utilizando la fórmula clásica.

Tal vez resulte interesante para el profesor saber que análisis erróneos de situaciones probabilísticas fueron realizados incluso por grandes matemáticos en los inicios de la teoría de la probabilidad.

Esclarecer por qué dichos análisis eran incorrectos fue una parte importante del desarrollo de la probabilidad. Los errores representaron una fuente de avance. Si grandes matemáticos cometían (y cometen) equivocaciones, ciertamente es de esperarse que nuestros alumnos también hagan análisis inexactos y tengan muchas veces ideas algo rudimentarias sobre la probabilidad. Pero los profesores pueden apoyarse en los errores y las ideas de sus alumnos:

- Los errores y falsas concepciones deben aprovecharse para enriquecer el aprendizaje, y no señalarse sólo como equivocaciones.

- Para conseguir que el alumno tome conciencia de ellos, es importante, en primer lugar, permitirle que exprese sus ideas.

- Dichas ideas podrán entonces confrontarse de manera constructiva, bien sea con la experiencia, con ejemplos y contraejemplos o con argumentos alternativos.

- En ocasiones, un resultado inesperado para el alumno tiene gran potencial para hacerlo repensar y afinar ideas que ha desarrollado previamente a la experiencia o al análisis.

- Por supuesto, el proceso anteriormente bosquejado debe realizarse dentro de un espíritu de búsqueda, de comprender mejor el tema que interesa, sin criticar en forma personal al alumno.

Tablas y gráficas de probabilidad

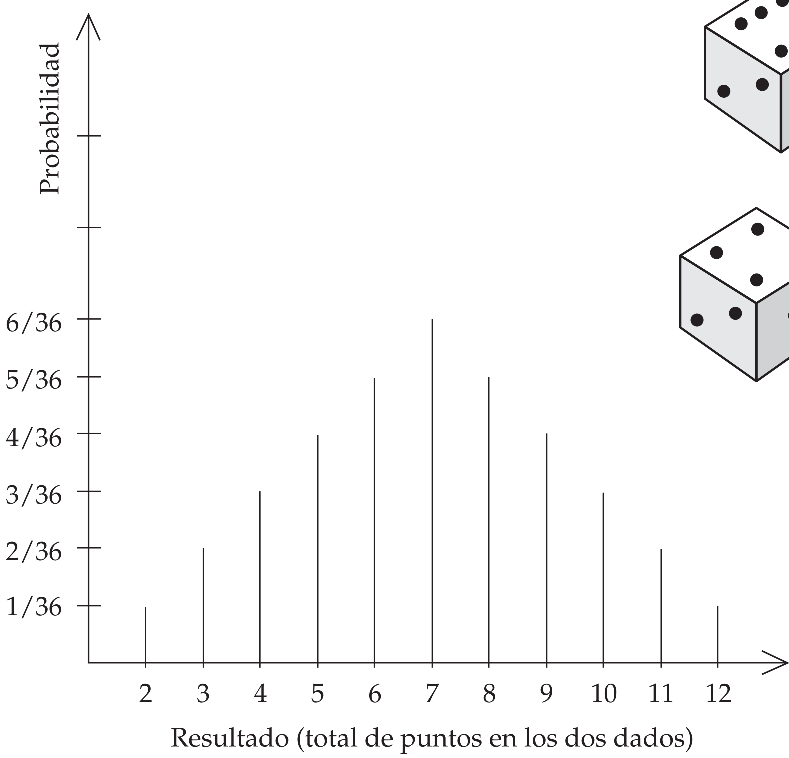
Conviene que al aplicar la fórmula clásica de la probabilidad, los alumnos construyan una tabla y una gráfica para presentar los diferentes resultados posibles de una experiencia aleatoria, así como sus probabilidades.

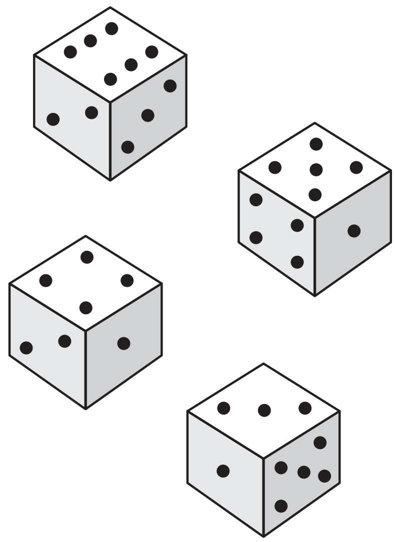
Por ejemplo, los resultados de lanzar dos dados y sumar los puntos que se obtienen en cada dado podrán presentarse por medio de la tabla y la gráfica de la siguiente página. Estas representaciones proporcionan a los alumnos elementos útiles para comparar y establecer relaciones entre los tratamientos probabilistas y estadísticos de situaciones aleatorias.

Lanzamiento de dos dados

Total de puntos	Posibilidades	Probabilidad
2	(1, 1)	1/36
3	(1, 2), (2, 1)	2/36
4	(1, 3), (2, 2), (3, 1)	3/36
5	(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)	4/36
6	(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)	5/36
7	(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)	6/36
8	(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)	5/36
9	(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)	4/36
10	(4, 6), (5, 5), (6, 4)	3/36
11	(5, 6), (6, 5)	2/36
12	(6, 6)	1/36

Posibles resultados de lanzar dos dados y sumar los puntos obtenidos





1. En un salón de clases, los pupitres están distribuidos en filas de 7. José y sus amigos siempre se sientan en la primera fila. ¿Cuál es la probabilidad de que José se siente en medio de la fila? ¿Se siente en un extremo de la fila?

2. Se elige al azar una letra de la palabra "Probabilidades".

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se elija una vocal?

b) ¿Se elija una consonante?

c) ¿Se elija una *i*?

d) ¿Se elija una *z*?

e) ¿Se elija una letra minúscula?

3. La tabla de la derecha muestra las percepciones, en salarios mínimos mensuales, de los trabajadores de un taller. Cada Navidad, los empleados compran entre todos un regalo y lo rifan, poniendo en una caja un papelito con el nombre de cada uno y eligiendo al azar un solo papelito.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane la rifa una mujer?

b) ¿Gane la rifa un empleado que perciba menos de 3 salarios mínimos?

c) ¿Gane la rifa un empleado que perciba 3 o más salarios mínimos?

d) ¿Gane la rifa uno de los empleados con salario más bajo?

Trabajador	Salario
Marcos	2.5
José	1.5
María Helena	1.5
Juan Raúl	2
Cipriano	2.5
Arturo	5
Cándida	1.5
Evelia	3

4. Juan y Pablo juegan a ver quién obtiene más puntos al lanzar un dado. Juan lanzó su tirada y obtuvo 4 puntos. ¿Cuáles son las probabilidades de Pablo de ganar, empatar y perder?

5. En una rifa intervienen los números del 1 al 100.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane un múltiplo de 3?

b) ¿Gane un múltiplo de 3 y de 5?

c) ¿Gane un número con un 3 entre sus cifras?

d) ¿Gane un número con un 3 o un 5 entre sus cifras?

6. ¿Cuál es la probabilidad de que un disparejo no se decida?

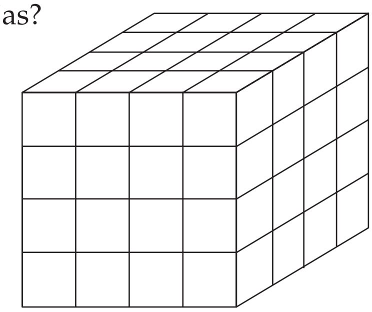
7. Un cubo de madera se pinta de rojo y luego se divide en cubos más pequeños, tal y como se indica en la figura. Si se escoge un cubo pequeño al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga tres caras rojas?

b) ¿Tenga dos caras rojas?

c) ¿Sólo tenga una cara roja?

d) ¿No tenga ninguna cara roja?



¿Cuántos cubitos hay en total?

8. Un agente de comercio sabe por experiencia que al visitar un cliente la probabilidad de hacer una venta es 1/2. Un día tiene cita con cinco clientes. ¿Cuál es la probabilidad de que realice al menos dos ventas?

9. Los tres tomos de un diccionario se colocan al azar en un librero. ¿Cuál es la probabilidad de que hayan quedado en el orden correcto?

10. Juan y Pablo juegan a ver quién obtiene más puntos al lanzar cinco veces un dado. Cuando les falta una tirada a cada uno, Juan lleva 19 puntos y Pablo lleva 17.¿Cuál es la probabilidad de Juan de ganar el juego? ¿Y la de Pablo?

11. Si combinas al azar las letras M, O, R y A, ¿cuál es la probabilidad de que obtengas una palabra con significado?

12. Si permutas (intercambias) al azar las cifras de 4 503:

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par?

b) ¿Obtener un múltiplo de 3?

c) ¿Obtener un múltiplo de 5?

d) ¿Obtener un múltiplo de 2 y de 5?

e) ¿Obtener un múltiplo de 9?

f) ¿Obtener un número menor que 5 000?

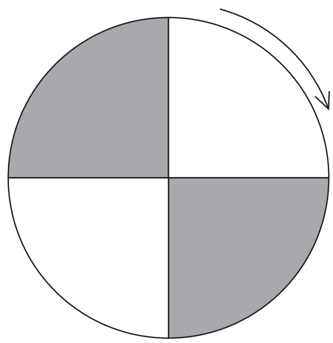
g) ¿Obtener un número entre 3 000 y 6 000?

13. En una feria hay un juego que consiste en lanzar dados sobre una ruleta como la que aparece abajo. Por $2 tienes derecho de realizar hasta tres tiros.

- Si aciertas en blanco a la primera, ganas $1 y tienes derecho a otra tirada; si no quedas eliminado.

- Si también aciertas en blanco a la segunda tirada, ganas $2 adicionales y tienes derecho a tirar por tercera vez; si no, quedas eliminado.

- Si aciertas nuevamente en blanco a la tercer tirada, ganas otros $4 adicionales.

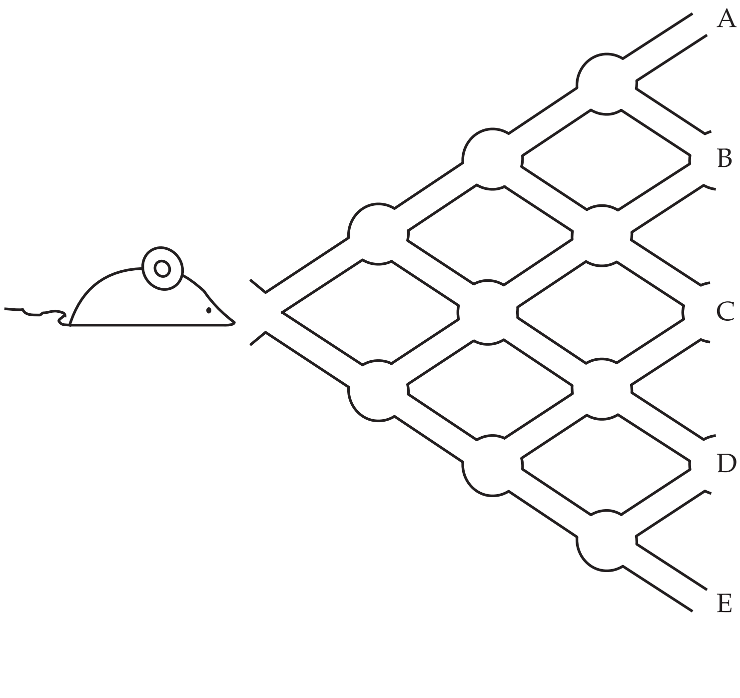


Así, si sólo aciertas a la primer tirada, puedes perder $1; si aciertas a la primera y segunda tirada, ganas $1; y si aciertas a las tres, ganas $5. ¿Cuáles son las probabilidades de perder $1, ganar $1 y ganar $5 en el juego?

Juega varias veces con un amigo para que te des cuenta de lo que puedes esperar ganar o perder en promedio al participar en un juego como éste.

14. Cuatro personas esperan en la taquilla de un cine; cada una trae un billete de $5 o $10, no se sabe. El costo del boleto es de $5 y el taquillero no tiene cambio, pues acaba de abrir. ¿Cuál es la probabilidad de que la fila avance sin que se altere el orden de sus ocupantes?

15. Un ratón de laboratorio entra en un laberinto como el que aparece dibujado a continuación. ¿Cuáles son las probabilidades de que salga por A? ¿Por B? ¿Por C? ¿Por D? ¿Por E? (El ratón no puede regresar.)



16. Se tienen tres canicas rojas y una canica blanca en una bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar simultáneamente tres canicas, las tres sean rojas? □

Es interesante comentar el último problema de la lista, no obstante su aparente simplicidad. Si se razona diciendo que al extraer tres canicas, pueden presentarse dos casos: o bien entre ellas sale la única canica blanca, o bien dicha canica no sale (esto es, las tres son rojas), es decir, si se supone que los casos posibles son:

R, R, B

R, R, R

(donde R y B denotan canica roja y canica blanca, respectivamente) y por lo tanto la probabilidad es 1/2, se estará cometiendo un error. El problema estriba en que las dos posibilidades antes mencionadas no son equiprobables. Si las canicas rojas estuvieran numeradas, digamos R1, R2 y R3, se vería que los posibles resultados de extraer tres canicas son (nótese que no se está tomando en cuenta el orden en el cual salen las canicas):

R1, R2, R3

R1, R2, B

R1, R3, B

R2, R3, B

Se tienen entonces cuatro casos posibles, de los cuales sólo uno correponde al evento que interesa, por lo que su probabilidad es 1/4. En otras palabras, el caso que en el primer intento de solución se denotó con R, R, B, tiene probabilidad de 3/4 de ocurrir, mientras que el caso R, R, R tiene probabilidad de 1/4.

Otra manera de razonar es la siguiente: como la bolsa tiene solamente cuatro canicas, extraer tres canicas al azar es lo mismo que dejar al azar una canica dentro de la bolsa. El caso "extraer tres canicas rojas" equivale a dejar la canica blanca en la bolsa y como cada canica tiene la misma probabilidad de quedarse en la bolsa cuando se extraen las tres restantes, entonces la probabilidad buscada es 1/4.

El problema en realidad ilustra varios puntos: conviene ser cuidadosos al contar los casos, hay que preguntarse si dichos casos son equiprobables y, finalmente, en matemáticas —y no sólo en probabilidad—, un recurso muy utilizado es reducir un problema a otro equivalente, pero que presenta una situación más clara o más sencilla para el análisis.

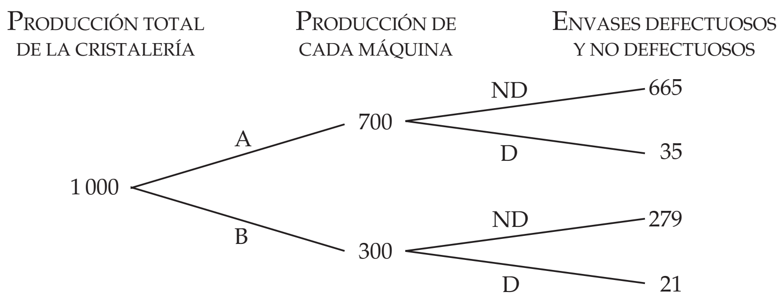
Lectura

La noción frecuencial de probabilidad y la solución de problemas

Además de ser una de las bases intuitivas de la teoría de las probabilidades, la idea de que la frecuencia de un evento se aproxima a su probabilidad resulta muy útil en la solución de problemas de cálculo y estimación de probabilidades, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Una cristalería fabrica envases de vidrio para perfumes, de los cuales 70% se produce en una máquina A y el restante 30% en una máquina B. Si 5% de los artículos producidos por la máquina A y 7% de los producidos por la máquina B resultan con algún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que un envase producido en la cristalería resulte defectuoso? ¿Cuál la de que un envase que se sabe defectuoso haya sido producido por la máquina A?

Para resolver el problema, supongamos que la cristalería produce 1 000 envases, entonces teóricamente tenemos la situación del siguiente diagrama de árbol, donde A y B significan máquina A y máquina B; y D y ND significan envases defectuosos y no defectuosos.



Hay en total 35 + 21 = 56 envases defectuosos sobre 1 000 producidos, entonces

$$\text{Probabilidad de un envase defectuoso} = \frac{56}{1\,000} = 0.056 = 5.6\%$$

De los 56 envases defectuosos, 35 fueron producidos por la máquina A, lo que a su vez quiere decir que:

$$\text{Probabilidad de que un envase defectuoso provenga de la máquina A} = \frac{35}{56} = 0.625 = 62.5\%$$

Problema. En una elección se sabe que 57% de las mujeres apoya al candidato A y 43% al candidato B, mientras que entre los varones la situación se invierte y 65% apoya al candidato B y sólo 35% al A. ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada candidato? Si se sabe además que 60% de las mujeres vota, mientras que sólo 53% de los hombres lo hace, ¿cuál es la probabilidad de ganar de cada candidato?

La noción frecuencial de la probabilidad

En muchas situaciones, la probabilidad de un evento no puede calcularse de antemano y debe ser estimada sobre la base de un gran número de observaciones.

Por ejemplo

1. ¿Son iguales las probabilidades de que un bebé sea niño o sea niña?

Parece natural pensar que las probabilidades son las mismas, pero una reflexión cuidadosa nos previene acerca de una posible falacia en tal respuesta: que de un nacimiento normal resulte o bien un niño o bien una niña son las dos únicas posibilidades, pero ¿qué garantiza que sean equiprobables?

En el caso de un volado, que las probabilidades de águila y sol sean iguales resulta de la suposición de que la moneda está bien balanceada y de que el lanzamiento no se realiza de manera tendenciosa, favorable a una de las caras. En general, al analizar fenómenos aleatorios, puede suponerse equiprobabilidad en los resultados siempre y cuando se den ciertas simetrías. En el caso de los nacimientos, no es posible encontrar dichas simetrías, pues el sexo de un bebé depende de factores biológicos complejos. Para contestar la pregunta no queda otra que observar lo que ocurre en numerosos nacimientos para ver las proporciones de niños y niñas que nacen.

2. La probabilidad de que al seleccionar al azar a una persona en una población ésta sea mujer es igual a la proporción de mujeres en la totalidad de dicha población. Si la población está formada por los asistentes a la clase de matemáticas, se puede contar y determinar la probabilidad. Si la población es la de China, puede estimarse la probabilidad en términos de la proporción observada en una muestra grande. No debe extrañarnos que siendo la probabilidad una medida de la certidumbre o incertidumbre, su estimación empírica pueda variar dependiendo de la información de que se disponga. Por cierto, tomando como base censos de diferentes países, resulta que la probabilidad de que en un nacimiento el bebé sea varón es de alrededor de .516, ligeramente superior a la probabilidad de que sea una niña. Hasta ahora hemos utilizado básicamente dos formas para calcular la probabilidad de que ocurra un evento dado:

DEFINICIÓN CLÁSICA DE LA PROBABILIDAD

$$\text{probabilidad} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{total de casos posibles}}$$

Ésta es la probabilidad teórica o *a priori*. La fórmula da un resultado exacto, pero se refiere a situaciones ideales, donde todos los casos o resultados posibles son equiprobables.

DEFINICIÓN FRECUENCIAL DE LA PROBABILIDAD

$$\text{probabilidad} = \frac{\text{número de veces que se repite el evento}}{\text{número total de observaciones realizadas}}$$

Ésta es la fórmula frecuencial o *empírica* de la probabilidad. La fórmula proporciona una estimación de la probabilidad que puede cambiar, dependiendo del número de observaciones realizadas.

Consideremos otra situación para insistir en algunas de las semejanzas y diferencias entre la fórmula *a priori* y la fórmula frecuencial o empírica para calcular probabilidades.

3. Supongamos que se tiene una bolsa con 15 canicas idénticas salvo en el color: 10 canicas son rojas y 5 son blancas. Calcular la probabilidad de obtener una canica blanca.

El razonamiento *a priori* para calcular la probabilidad de obtener una canica blanca al extraerla al azar es que siendo las canicas idénticas, las posibilidades de sacar cualquier canica son iguales; y habiendo 5 canicas blancas de un total de 15 canicas, entonces la probabilidad buscada es 5/15 = 1/3.

Para aplicar la fórmula empírica es preciso razonar en forma distinta: se repite muchas veces la experiencia de extraer al azar una canica de la bolsa para ver qué ocurre. Entonces se toma una canica, se anota su color y se devuelve a la bolsa para que la siguiente extracción se realice en las mismas condiciones. Al cabo de muchas extracciones se verifica la proporción de canicas blancas en relación con el número total de extracciones; si se observa que es aproximadamente o está muy cerca de 1/3, entonces puede afirmarse que la probabilidad de sacar una canica blanca es 1/3.

En realidad, en situaciones ideales como la del ejemplo anterior, se recurre a la fórmula clásica para calcular probabilidades, pero si no se conoce el contenido de la bolsa o si éste es inaccesible, entonces tiene que recurrirse a la noción frecuencial de la probabilidad.

En ambos casos, la probabilidad se expresa como una razón. Pero el origen del conocimiento acerca de los componentes que intervienen en el cálculo es distinta. En un caso, razones de simetría —las canicas son idénticas, salvo por el color— justifican la equiprobabilidad de los posibles resultados de la experiencia aleatoria y por lo tanto la aplicación de la fórmula clásica. En el otro caso uno se atiene a la evidencia experimental.

4. De una bolsa que contiene 50 canicas; 5 rojas y 45 blancas, se extrae una canica al azar. Antes de tomar la canica se hace una apuesta sobre el color que saldrá. Como la probabilidad de tomar una canica blanca es de 45/50 = 9/10 = 0.9, mientras que la probabilidad de tomar una canica roja es de 5/50 = 1/10 = 0.1, es evidente que la apuesta más racional es por el color blanco, con las oportunidades muy a favor. La apuesta está hecha. Sin mirar al interior de la bolsa se extrae una canica y ¡sale roja! ¿Qué significa esto? ¿Se calculó mal la probabilidad?

La cuestión planteada por este ejemplo es que las afirmaciones probabilísticas no son predicciones acerca de lo que ocurrirá en un solo experimento, sino afirmaciones concernientes a lo que podrá observarse a lo largo de un número muy grande de experimentos. Si pudiera afirmarse con certeza lo que sucederá en un solo experimento, no se estaría en una situación de incertidumbre, que es justamente lo que caracteriza al azar —salvo en los casos extremos de probabilidad 0 y probabilidad 1—. Este es un punto muy importante: en las experiencias aleatorias, si bien los resultados individuales ocurren de manera totalmente azarosa, aparecen regularidades en la frecuencia de los resultados de series largas de experimentos.

Así, en el ejemplo anterior, puede verificarse que si el experimento se repite muchas veces —cada vez se regresa la canica a la bolsa y se agita para mezclar bien las canicas—, entonces se observa que las frecuencias con las cuales aparecen canicas blancas y rojas se aproximan, cada vez más, a sus probabilidades al crecer el número de observaciones.

Actividades de simulación

A medida que los alumnos vayan adquiriendo mayor familiaridad con el cálculo *a priori* y la estimación empírica de probabilidades, se podrán tratar en clase ejemplos progresivamente más complejos, y cambiar el énfasis del conteo de casos (que puede volverse muy complicado) hacia un análisis de los problemas, para que se vayan desarrollando en forma intuitiva conceptos como los de dependencia e independencia, que están tras las reglas de composición de probabilidades. Ya anteriormente se ha enfatizado que las definiciones y propiedades formales deben explicitarse a partir de una base conceptual firme, de manera que los alumnos no corran el riesgo de simplemente memorizar y aplicar de una manera irreflexiva fórmulas y procedimientos.

Una actividad eficaz para orientar a los alumnos hacia el análisis de los problemas es pedirles que diseñen actividades de simulación para resolverlos. La idea de simular consiste en explorar el comportamiento de una experiencia aleatoria observando otra experiencia equivalente, pero más fácil de realizar o de estudiar. Esta idea juega un papel muy importante en la teoría y aplicaciones de las probabilidades, pero para el profesor puede, además, constituir un importante recurso didáctico. Mediante experiencias de simulación, los alumnos podrán valorar las diferencias, ventajas y desventajas de los acercamientos teóricos y empíricos al estudio de las probabilidades. Se puede, por ejemplo, obtener o conjeturar un resultado mediante el análisis y validar dicho resultado a través de la simulación. Con ésta se puede, también, atacar problemas difíciles y resolverlos, avanzando al mismo tiempo en la comprensión informal de nociones y resultados que se verán posteriormente.

Lectura

El modelo de urna

La situación que consiste en extraer al azar una o más canicas (o papelitos) de una caja (o urna) donde hay varias de diversos colores (o marcados con números diferentes), es uno de los modelos universales de la probabilidad, pues a través de él se puede representar y resolver casi cualquier problema donde intervenga un número finito de resultados posibles. También puede utilizarse para simular casi cualquier experiencia aleatoria con las mismas características.

El problema del agente de ventas

Un agente comercial sabe que cada vez que visita un cliente tiene 20% de probabilidades de hacer dos ventas, 50% de probabilidades de hacer sólo una y 30% de no hacer ninguna. Un día tiene cita con cinco clientes. ¿Cuánto puede esperar ganar ese día si por cada venta que realiza gana $20?

Solución

Para simular la situación del ejemplo, ponemos dos canicas azules, cinco blancas y tres rojas en una bolsa; luego extraemos una a una y al azar cinco canicas de la bolsa, devolviendo cada vez dentro de la bolsa la canica que extraemos antes de la siguiente extracción (¿por qué se necesita devolver la canica?). Dependiendo de lo que salga diremos:

- Si sale azul, el agente hizo dos ventas y ganó $40.
- Si sale blanca, sólo hizo una venta y ganó $20.
- Si sale roja, no hizo ninguna venta y no ganó.

Llevando una estadística de lo que ocurre al repetir varias veces el experimento anterior, se llegará a estimar con bastante exactitud la cantidad que el agente puede esperar ganarse ese día.

El problema del elevador

Cinco personas desconocidas entre sí suben al elevador de un edificio de 10 pisos. ¿Es grande o es pequeña la probabilidad de que dos personas bajen en un mismo piso?

Solución

Para simular esta situación, metemos en una caja 10 papelitos marcados con los números del 1 al 10 (van a representar los 10 pisos del edificio), luego extraemos cinco papelitos al azar, uno después de otro, devolviendo cada vez el papelito que se extrae a la caja antes de realizar la siguiente extracción (nuevamente la pregunta es por qué hace falta devolver el papelito). Los resultados que se obtengan nos dirán en qué pisos bajaron las personas y podremos ver si hubo dos que descendieron en el mismo piso (incidentalmente, el problema de las piezas de bronce se resuelve de manera muy similar a este).

Un reto. A un prisionero se le proporcionan cuatro canicas blancas, cuatro rojas y dos bolsas. Se le dice que puede distribuir las canicas en las bolsas como le convenga, pero que su suerte depende de que escoja al azar una bolsa y sin ver dentro de ella extraiga una canica: si sale blanca será puesto en libertad, pero si es roja será fusilado. ¿Cómo debe distribuir el prisionero las canicas en las bolsas para tener las mayores oportunidades de quedar libre?

Por ejemplo

1. Un jugador de baloncesto suele encestar 80% de sus lanzamientos individuales. Al cobrar una falta, si el jugador encesta, puede hacer un lanzamiento adicional, de manera que pueda conseguir 0 puntos (si falla el primer tiro), 1 punto (si encesta el primer tiro y falla el segundo), o 2 puntos (si encesta en los dos intentos). ¿Cuál es la probabilidad, al cobrar una falta, de que el jugador obtenga 0 puntos? ¿1 punto? ¿2 puntos?

Para resolver el problema usando simulación, puede procederse como sigue:

1º. Se ponen en una caja 10 papelitos, en ocho de ellos escribimos “encesta” y en dos de ellos “falla” (o bien usamos papelitos de dos colores, o canicas de dos colores).

2º. Para simular el cobro de una falta, mezclamos bien los papelitos y extraemos uno al azar, si sale “falla”, termina el experimento; si sale “encesta”, devolvemos el papelito a la caja, mezclamos bien los papelitos y realizamos una segunda extracción, que finaliza el experimento. Al terminar anotamos si se obtuvieron 0, 1 o 2 puntos.

3º. Para estimar las probabilidades buscadas, se tiene que repetir el experimento muchas veces. Si el experimento se repite digamos 50 veces, las probabilidades buscadas se estiman dividiendo entre 50 las frecuencias con que aparecieron 0, 1 y 2 puntos.

Resuelve los siguientes problemas por simulación:

2. Imagina que respondes a un examen de 10 preguntas con *falso* o *verdadero*, pero sólo conoces las respuestas de cinco preguntas. ¿Cuál es tu probabilidad de aprobar si respondes al azar las otras cinco?

3. En la parte interior de las corcholatas de un refresco vienen grabadas las letras M, É, X, I, C y O. Si se completa la palabra MÉXICO juntando corcholatas se tiene derecho a un premio. ¿Es grande o pequeña la probabilidad de ganarse el premio al comprar 10 refrescos? (Nota: todas las letras tienen las mismas oportunidades de ocurrir)

4. En una fundición se fabrican piezas de bronce, en lotes de 100, que se obtienen virtiendo el bronce fundido en moldes. En el bronce fundido para cada lote hay en promedio 30 partículas de impurezas, distribuidas al azar, que van a parar a las piezas. Las piezas con dos o más impurezas no resultan de muy buena calidad y se descartan como defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al fundir un lote, resulte al menos una pieza defectuosa? ¿Y dos o más piezas defectuosas? □

UN RETO. LAS TRIBULACIONES DEL SULTÁN

Hace mucho tiempo existió un pequeño reino llamado Kifiristán, próspero gracias a la laboriosidad de sus habitantes. Sin embargo, preocupaba a su Sultán, Harún al-Yogur, el rápido crecimiento de la población, que amenazaba con volver insuficiente en corto tiempo la producción de alimentos. Después de mucha reflexión, decidió tomar una drástica medida para limitar el aumento de la población: les prohibió a las parejas procrear hijos después del nacimiento de su primer varón.

Esta medida provocó acaloradas discusiones sobre la forma en que alteraría no sólo el crecimiento, sino también la composición de la población. Había quienes alegaban que en pocos años la población de Kifiristán estaría compuesta principalmente por mujeres, debido a que las parejas podrían tener muchas niñas, pero sólo un varón. Otros sostenían que predominarían los varones, debido a que el primer hijo de muchas parejas podría ser varón, lo cual automáticamente les impediría procrear mujeres.

Suponiendo que en Kifiristán, en el momento del decreto, la población tenía aproximadamente la misma proporción de hombres y mujeres, y suponiendo que al nacer un bebé las probabilidades de que nazca varón o niña sean aproximadamente las mismas. ¿Tú qué opinas?

a) ¿Que en Kifiristán finalmente predominaron las mujeres?

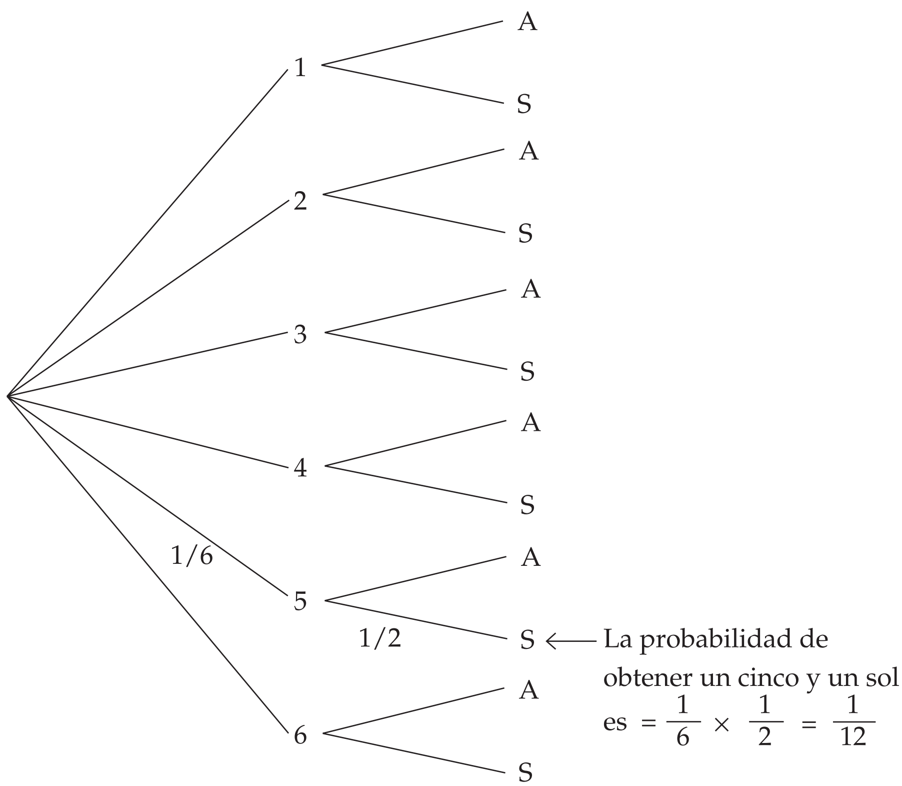
b) ¿Que, por el contrario, Kifiristán se convirtió en un país de población predominantemente masculina?

c) ¿Que en Kifiristán, la proporción de hombres y mujeres siguió siendo la misma?

Cálculos con probabilidades

Independencia y regla del producto

En algunos de los ejemplos de cálculo de probabilidades desarrollados hasta ahora hay un elemento muy interesante: en un momento dado utilizamos un razonamiento del estilo: *"la probabilidad de que esto junto con esto otro suceda, es tal parte de tal otra parte del total de posibilidades"*. Por ejemplo, supóngase que se arrojan simultáneamente un dado y una moneda, y se quiere calcular la probabilidad de obtener un cinco y un sol. La probabilidad de obtener un cinco al arrojar un dado es 1/6 y la probabilidad de que salga sol en un volado es 1/2. Entonces la probabilidad de obtener un cinco y un sol al lanzar simultáneamente un dado y una moneda es 1/6 de 1/2, esto es, igual a $1/6 \times 1/2 = 1/12$.



El razonamiento aplicado se conoce como el teorema de multiplicación de probabilidades:

Si la probabilidad de que ocurra el evento A es P(A) y la probabilidad de que ocurra el evento B es P(B), entonces la probabilidad de que ocurran conjuntamente los eventos A y B es $P(A) \times P(B)$, siempre y cuando los eventos A y B sean independientes.

El problema del cumpleaños

Lectura

Si en la clase pedimos a los alumnos que cada uno vaya diciendo la fecha de su cumpleaños, es probable que de pronto alguien salte exclamando: ¡Oye, cumplimos años el mismo día!

Parece una gran coincidencia, pero, por ejemplo, en un salón con 23 alumnos la probabilidad de que haya dos con el mismo cumpleaños es aproximadamente 1/2, en un salón con 30 alumnos es aproximadamente 7/10 y en un salón con 40 alumnos es aproximadamente 9/10. ¿Cómo se calculan tales probabilidades?

La idea es calcular primero la probabilidad de que no haya dos alumnos que cumplan años el mismo día. Luego se calcula la probabilidad del evento complementario, es decir, la probabilidad de que haya al menos dos alumnos con el mismo cumpleaños.

Veamos, a manera de ilustración, lo que ocurre con un grupo de cuatro personas. Si la primera nació en un determinado día del año, la probabilidad de que la segunda tenga un aniversario diferente de la primera es 364/365, la probabilidad de que la tercera tenga un aniversario diferente a las otras dos es de 363/365. Los eventos anteriores son independientes, de manera que la probabilidad compuesta de que el segundo difiera del primero y el tercero difiera del primero y el segundo, que sería lo mismo que decir que los tres aniversarios son diferentes, está dada por el producto:

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$$

y, repitiendo el argumento con la cuarta persona, se tendría que la probabilidad de que las cuatro personas tengan aniversario diferentes es:

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} = 0.983 \ldots$$

Luego, para calcular la probabilidad de que al menos dos de las cuatro personas tengan el mismo cumpleaños, se resta la probabilidad anterior de 1. Se obtiene:

$$1 - 0.983 \ldots = 0.016 \ldots$$

Efectuar el mismo cálculo para un grupo de 20, 30 o 40 personas parece una empresa formidable, pero si disponemos de una calculadora, y organizamos el cálculo llenando una tabla, puede realizarse en clase. Los resultados son sorprendentes. Para 50 personas, la probabilidad de cumpleaños coincidentes es de .970. Para 100 personas las oportunidades de que haya coincidencia son de más de 3 000 000 contra uno. Obviamente para 367 o más personas, es seguro que hay cumpleaños coincidentes.

La actividad puede completarse pidiéndole a los alumnos que hagan una encuesta en los salones de su escuela, para ver en cuántos encuentran dos o más alumnos que cumplan años el mismo día.

¿Qué significa la condición de que los eventos A y B sean independientes? Que la ocurrencia de cualquiera de ellos no afecta la probabilidad de ocurrir del otro. Dicha condición evidentemente se satisface en el ejemplo anterior: si sale cinco al arrojar un dado esto no afecta la probabilidad de obtener sol al realizar un volado y, recíprocamente, el resultado en el dado no afecta el del volado.

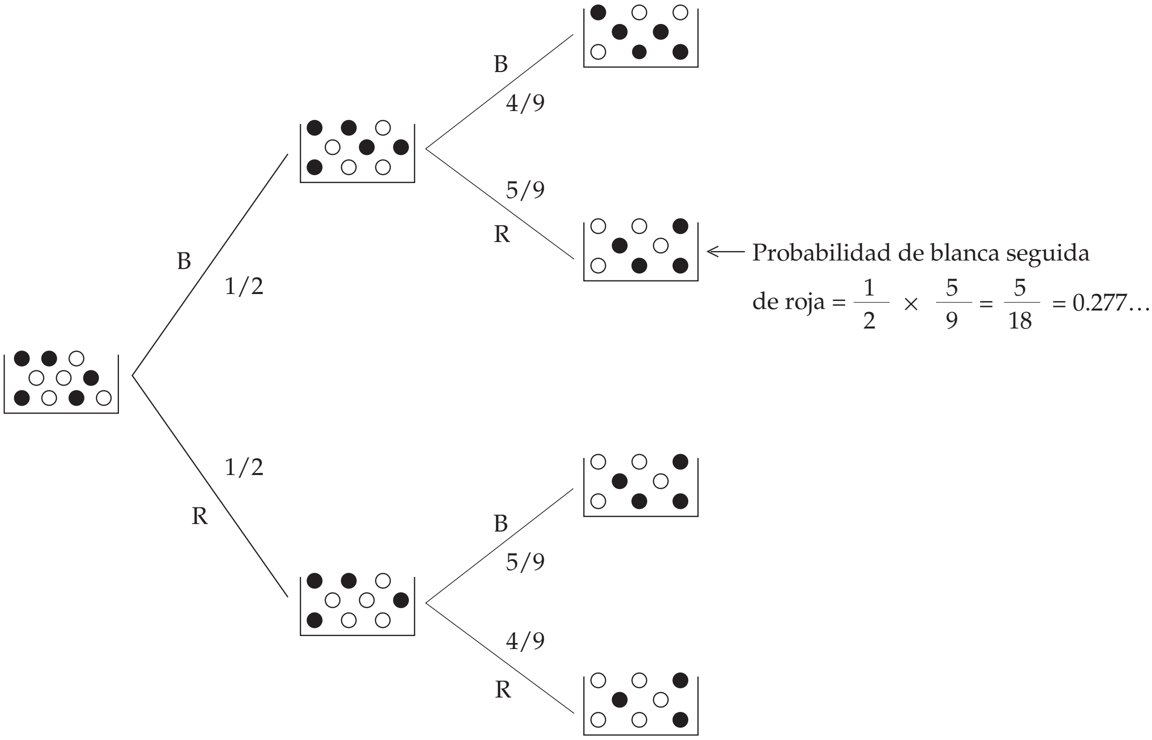
El ejemplo de una serie de volados es interesante. Si lanzo un volado y obtengo águila, esto no afecta la probabilidad de obtener un águila al lanzar otro volado. Si en nueve volados consecutivos he obtenido águilas y lanzo todavía un décimo volado, la probabilidad de obtener águila en este último volado sigue siendo 1/2. A menos que la moneda o las condiciones del lanzamiento sean truncadas, la probabilidad de obtener un águila en un volado no cambia a lo largo de una serie de volados. ¡La moneda no tiene memoria! Un lanzamiento y otro son eventos independientes.

En muchas situaciones de la vida cotidiana, e incluso en los medios de comunicación, son frecuentes los razonamientos probabilísticos falaces, cuyo problema estriba precisamente en no reconocer la independencia de diferentes ensayos. Otra fuente de error frecuente es la situación opuesta, asumir que dos eventos son independientes, cuando en realidad la ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad del otro.

Por ejemplo

1. Consideremos una caja que contiene 5 canicas blancas y 5 canicas rojas. Seleccionemos una canica al azar, pongámosla a un lado y acto seguido seleccionemos, otra vez al azar, una segunda canica. ¿Cuál es la probabilidad de extraer primero una canica blanca y después una roja?

Si procedemos mecánicamente, pensando que, puesto que la probabilidad de extraer una bola blanca es $5/10 = 1/2$ y la probabilidad de extraer una bola roja es también $1/2$, y por lo tanto la probabilidad buscada es $1/2 \times 1/2 = 1/4 = .25$, no obtendremos el resultado correcto. Las condiciones de la segunda extracción son afectadas por el resultado de la primera, ya que si en la primera extracción salió una canica blanca, quedan en la bolsa 4 canicas blancas y 5 rojas, de manera que la probabilidad de que salga una canica roja en la segunda extracción es de $5/9$. La probabilidad buscada es entonces $1/2 \times 5/9 = 5/18 = 0.27777...$ ¡Muy diferente!



REGLA DEL PRODUCTO DE PROBABILIDADES

Para obtener la probabilidad de la ocurrencia conjunta de dos eventos:

a) Verificamos que sean independientes.

b) Calculamos por separado las probabilidades de cada uno de ellos y las multiplicaciones.

Regla de la suma

Una observación

Antes de pasar a otro tema, conviene observar que muchos problemas de probabilidad presentan dos tipos de dificultades: una dificultad inherente al problema tiene que ver con su complejidad combinatoria, es decir, con el conteo de los casos que pueden presentarse. Pero para muchos alumnos hay otra dificultad, relacionada con la precisión en el lenguaje y el uso de la lógica.
Para ilustrarla, considérese el experimento aleatorio que consiste en arrojar cinco monedas, y póngase atención en los eventos siguientes:

1. No sale ningún sol.
2. Salen sólo soles.
3. No sale ningún águila.

4. Salen sólo águilas.
5. Sale sol en una moneda y cualquier resultado en las otras.
6. Sale al menos un sol.
7. Sale un sol y cuatro águilas.

Es probable que la mayoría de nuestros alumnos estén de acuerdo en que algunas de las expresiones anteriores describen el mismo evento; por ejemplo 1 y 4, así como 2 y 3. También 5 y 6 describen un mismo evento, y de hecho 6 es la forma apropiada de describirlo. Por cierto, 5 y 6 abarcan al evento 7 pero incluyen más posibilidades.

Pero si les preguntamos, cuál de las expresiones anteriores corresponden a la negación del evento 4 (salen sólo águilas), es decir, indica que 4 no ocurre, muchos contestarán: “salen sólo soles” (2) o “no sale ningún águila” (su equivalente, 3), lo cual es incorrecto. En efecto, si quiero probarle a alguien que, en cinco volados, no es cierto que sólo salgan águilas, lo que tengo que hacer es mostrar que sale al menos un sol; así el evento 6 es la negación del evento 4. La moraleja de las líneas anteriores es que el alumno puede tener algunas dificultades con el significado de algunas expresiones, sobre todo las que hacen uso de cuantificadores, conectivos y otras partículas lógicas. Esta situación puede ser aprovechada constructivamente por el profesor para discutir, en el contexto lleno de sentido de la probabilidad, algunos aspectos relacionados con el significado y estructura lógica de ciertas afirmaciones.

Regla de la suma

Supóngase que se quiere determinar la probabilidad de obtener un número par de puntos al lanzar un dado. La respuesta inmediata es que como 3 de los 6 resultados posibles indican un número par de puntos, entonces la probabilidad es 1/2. Esta solución es correcta, pero vamos a analizar el problema desde otro punto de vista. Obtener un número par de puntos al tirar un dado, es equivalente a obtener 2, 4 o 6 puntos. Ahora bien, la probabilidad de obtener 2 puntos es 1/6, la probabilidad de obtener 4 es 1/6 y la probabilidad de obtener 6 también es un 1/6, por lo que la probabilidad buscada es:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

¡Un momento! ¿Realmente está justificado este tipo de razonamiento? Consideremos un ejemplo más sencillo: en un volado la probabilidad de obtener águila es 0.5, la de obtener sol es igualmente 0.5,y la de obtener águila o sol es 0.5 + 0.5 = 1. ¡No hay problema! 50% de oportunidades de obtener un águila, más 50% de oportunidades de obtener sol dan 100% de oportunidades de obtener un águila o un sol.

La condición para poder sumar probabilidades en esta forma es que los eventos sean mutuamente excluyentes, es decir, que no puedan ocurrir conjuntamente. Por ejemplo, supóngase que se lanzan dos monedas, digamos la moneda 1 y la moneda

2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un águila en la moneda 1 o un águila en la moneda 2? Si mecánicamente sumáramos las probabilidades individuales diríamos:

$$0.5 + 0.5 = 1$$

¡Absurdo! Cuando tiro dos monedas no es seguro que al menos una de ellas caiga águila. Las posibilidades son:

A A, A S, S A y S S

Tres de las cuales corresponden al evento “águila en la moneda 1 o águila en la moneda 2”. La probabilidad buscada es en realidad 3/4 (nótese que no se excluye la posibilidad de que el águila salga en ambas).

En este ejemplo no es posible sumar simplemente las probabilidades, porque los eventos “águila en la moneda 1” y “águila en la moneda 2” no son mutuamente excluyentes.

REGLA DE LA SUMA

Si dos o más eventos son *mutuamente excluyentes*, la probabilidad *total* de que ocurra uno u otro se obtiene sumando la probabilidad de cada evento.

Eventos no excluyentes

Es recomendable también que haya numerosos ejemplos para que los alumnos resuelvan problemas en casos donde los eventos no son mutuamente excluyentes.

Por ejemplo

1. En una rifa participan los números del 1 al 100. ¿Cuál es la probabilidad de que gane un múltiplo de 2 o de 3 o de ambos.

2. Entre los 45 alumnos de una escuela se hizo una encuesta sobre sus actividades de un fin de semana:

27 habían estudiado
22 habían salido de paseo
13 habían estudiado y salido de paseo

¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya estudiado y salido de paseo? ¿De que haya salido de paseo pero no estudiado? ¿De que haya salido de paseo o estudiado o hecho ambas cosas?¿De que no haya hecho ninguna de las dos cosas?

3. En una fábrica hay 135 obreros: para llegar al trabajo 75 utilizan el autobús y 60 usan pesera, entre los cuales hay 35 que emplean ambos medios de transporte. El resto llega a pie. ¿Cuál es la probabilidad de que un obrero utilice al menos uno de los dos medios de transporte? □

Al principio, los problemas deberán ser tales que los alumnos puedan utilizar sus propias representaciones y procedimientos para explorar las relaciones entre los datos y resolverlos. Más adelante, el profesor podrá introducirlos al uso de diagramas de Venn y de Carroll.

4. Para discutir en clase:

a) Si p es la probabilidad de que ocurra un evento, ¿1– p es la probabilidad de que no ocurra?

b) ¿La probabilidad de que al menos uno de dos resultados suceda es igual a uno menos la probabilidad de que ninguno de los dos ocurra?

c) ¿Pueden dos eventos independientes ser mutuamente excluyentes? ¿Por qué sí o por qué no?

5. Pablo y José, dos buenos amigos estudiantes de bachillerato, están considerando las oportunidades de hacer una carrera universitaria. Van a presentar exámenes de admisión en dos instituciones. Revisando las guías para estos exámenes, Pablo estima que la probabilidad de que apruebe el examen de la UNAM es 4/5 y la probabilidad de que apruebe el examen del IPN es 3/4. José estima que la probabilidad de que apruebe el examen de la UNAM es 5/6 y la probabilidad de que apruebe el examen del IPN es 1/2.

Calcula las probabilidades de que:

a) Los dos aprueben el examen de la UNAM.

b) Los dos aprueben el examen del IPN.

c) Los dos aprueben ambos exámenes.

d) Alguno de ellos apruebe un examen.

e) Los dos reprueben ambos exámenes.

(*Sugerencia*. Dibuja un diagrama de árbol para cada estudiante y considera que los resultados que obtiene cada uno son independientes de los que obtiene el otro.)

6. Una bolsa contiene tres monedas, dos de ellas normales, y una con dos soles. Se extrae una moneda al azar de la bolsa y se echa un volado. Si sale sol, se lanza un segundo volado con la misma moneda. Si sale águila, se selecciona al azar una de las dos monedas restantes en la bolsa y se lanza un volado.

Encontrar las probabilidades de que:

a) Salga sol en el primer volado.

b) Salga sol en los dos volados.

c) Salga águila en los dos volados.

Respuesta: *a)* 2/3, *b)* 3/8, *c)* 1/8. (*Sugerencia*: usa un diagrama de árbol para analizar el problema.)

7. Se eligen tres niños al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres hayan nacido el mismo día de la semana?

Respuesta: 1/49. (*Sugerencia*: piensa en el problema más simple. Se eligen dos niños al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los dos hayan nacido el mismo día de la semana? Respuesta: 1/7. (*Sugerencia*: supongamos que el primer niño nació en lunes.)

8. Un jugador de baloncesto, suele acertar 65% de sus lanzamientos al cobrar faltas personales. Si al cobrar una falta el jugador acierta, puede hacer un lanzamiento adicional, de manera que es posible que consiga 0 puntos (si falla el primer tiro), 1 punto (si acierta el primer tiro y falla el segundo) o 2 puntos (si acierta en los dos intentos). Calcular la probabilidad de que, al cobrar una falta, el jugador obtenga:

a) 0 puntos, *b)* 1 punto, *c)* 2 puntos

9. Según las estadísticas, al nacer un bebé la probabilidad de que sea varón es de aproximadamente .516 (o 51.6%). Al considerar dos nacimientos al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos bebés sean varones?

b) ¿Los dos bebés sean niñas?

c) ¿Uno sea varón y otro niña?

Respuestas:

a) $.516 \times .516$ *b)* $(1 - .516) \times (1 - .516)$ *c)* $.516 \times (1 - .516) + (1 - .516) \times .516$

Dos problemas bonitos

Lectura

La probabilidad está llena de problemas que no se plantean en otras partes de las matemáticas. Aun personas con una sólida cultura matemática, pero que no son expertas en esta disciplina, recelan cuando se les plantea un problema de probabilidad, porque saben que detrás de enunciados aparentemente sencillos se encuentran soluciones que parecen despreciar el sentido común, o requieren de un tipo de ingenio al que no están acostumbrados. Considérese, por ejemplo, el siguiente problema:

Una bolsa contiene un número desconocido de canicas blancas. Si se permite extraer una canica a la vez y luego devolverla a la bolsa, ¿cuántas canicas hay en la bolsa?

Problemas como el anterior pueden desconcertarnos momentáneamente, ya que al extraer canicas de la bolsa sólo puede confirmarse que las canicas que contiene son blancas, pero no puede saberse cuántas hay, porque no puede estarse seguro de que la canica extraída una vez no sea la misma que se devolvió en ocasiones anteriores. Sin embargo, la solución es muy sencilla, aunque quizás parezca un poco tramposa. Consiste en introducir canicas de otro color, por ejemplo negras, dentro de la bolsa y realizar luego numerosas extracciones. De esta manera podremos enterarnos de la proporción de canicas blancas y negras contenidas en la bolsa y, como conocemos el número de canicas negras, puesto que nosotros las introdujimos, podremos despejar el número de canicas blancas.

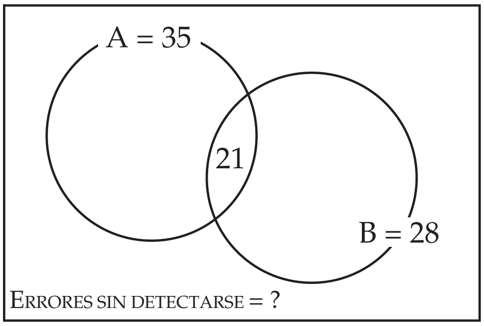
El problema anterior puede parecer una curiosidad matemática de poco interés práctico, pero tiene aplicaciones importantes en el conteo de poblaciones inaccesibles, como la que ilustra el siguiente problema.

Problema: Para contar el número de osos que habitan un paraje y ver si no estaban en peligro de extinción, se capturaron y marcaron 15. Luego se llevó un registro de cada oso que se observaba y se encontró que de 115 observaciones, 23 se trataban de un oso marcado. ¿Cuál es el número de osos que podemos estimar en el paraje? □

Consideremos ahora el siguiente problema:

En una prueba de eficiencia se le pide a dos secretarias, llamémoslas A y B, que revisen un escrito de mecanografía para ver cuántos errores encuentran. La secretaria A encuentra 35 errores y la B encuentra 28, entre los cuales hay 21 errores que fueron detectados por ambas secretarias. ¿Cuántos errores se quedaron sin detectar? ¿Cuántos errores había en total en el escrito?

Muchas personas intentan resolver este problema dibujando el siguiente diagrama de Venn, pero se dan cuenta de que “faltan datos”: *si me dicen cuántos errores* *había, puedo encontrar cuántos dejaron sin detectar; y si me dicen cuántos dejaron sin detectar, puedo saber cuántos había, pero no puedo descubrir las dos cosas al mismo tiempo.*



TOTAL DE ERRORES = ?

La solución de este problema también es sencilla de explicar, aunque no es fácil que se le ocurra a uno. Si llamamos X al número desconocido de errores que había en el escrito, entonces la eficiencia de la secretaria A está dada por el cociente $35/X$. Por otro lado, como descubrió 21 de los 28 errores detectados por la otra secretaria, podemos estimar que su eficiencia anda alrededor de $21/28$. Entonces:

$$\frac{35}{X} \approx \frac{21}{28}$$

de donde, despejando X se obtiene:

$$X \approx \frac{28 \times 35}{21} = 46.6$$

Esto es, en el escrito había alrededor de 46 o 47 errores.

Podrá argüirse que la respuesta anterior sólo es una estimación, pero éstas son respuestas admisibles en la probabilidad. Todavía hay otra moraleja útil que podemos extraer de este problema: las soluciones pueden ser fáciles de explicar, pero esto no significa que los problemas también lo sean.

Nuevamente el problema puede parecer de poco interés. Sin embargo, describe en términos simples un experimento establecido y usado por Rutherford –uno de los grandes físicos de nuestro siglo y autor de la primera transmutación del átomo– para medir destellos (el comentario es de William Feller, autor del más hermoso libro de probabilidad).

Es posible que el profesor no tenga la oportunidad de discutir problemas como los anteriores con sus alumnos de secundaria, pero es bueno saber que detrás de problemas aparentemente simples, no muy diferentes de los que les enseñamos a resolver, se encuentran aplicaciones interesanes de la probabilidad.

Documentos, materiales de apoyo y sitios en Internet para la educación básica, coordinados por la SEP

Preescolar

Material para profesores

Guía para la educadora. Orientaciones para el uso de material para actividades y juegos educativos. Educación preescolar. Último grado, 4a. reimp. de la 1a. ed., México, SEP, 2000.

Material para el alumno

Materiales para actividades y juegos educativos. Educación preescolar, México, SEP, 2000.

Primaria

Materiales para profesores

Avance programático. Primer grado. Educación básica. Primaria, México, SEP, 1997.
Avance programático. Segundo grado. Educación básica. Primaria, México, SEP, 1996.
Avance programático. Tercer grado. Educación básica. Primaria, México, SEP, 1997.
Avance programático. Cuarto grado. Educación básica. Primaria, México, SEP, 1997.
Avance programático. Quinto grado. Educación básica. Primaria, México, SEP, 1997.
Avance programático. Sexto grado. Educación básica. Primaria, México, SEP, 1997.

Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Primer grado, México, SEP, 2000.
Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Segundo grado, México, SEP,2000.
Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Tercer grado, México, SEP, 2000.
Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Cuarto grado, México, SEP, 2000.
Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Quinto grado, México, SEP, 2000.
Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Sexto grado, México, SEP, 2000.

La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, México, SEP, 1999 (cuatro audiocintas).
La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Lecturas, México, SEP, 1999.
La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Material recortable, México, SEP, 1999.
La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Primera parte, México, SEP, 1999.
La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Segunda parte, México, SEP, 1999.

Libro para el maestro. Matemáticas. Primer grado, México, SEP,2000.
Libro para el maestro. Matemáticas. Segundo grado, México, SEP, 2000.
Libro para el maestro. Matemáticas. Tercer grado, México, SEP, 2000.
Libro para el maestro. Matemáticas.Cuarto grado, México, SEP, 2000.
Libro para el maestro. Matemáticas. Quinto grado, México, SEP, 2001.
Libro para el maestro. Matemáticas. Sexto grado, México, SEP, 2001.

Plan y programas de estudio. Educación básica. Primaria, México, SEP, 1998.

Materiales para el alumno

Matemáticas. Primer grado, México, SEP, 1999.
Matemáticas. Segundo grado, México, SEP, 1999.
Matemáticas. Tercer grado, México, SEP, 1999.
Matemáticas. Cuarto grado, México, SEP, 2000
Matemáticas. Quinto grado, México, SEP, 2001.
Matemáticas. Sexto grado, México, SEP, 2001.
Matemáticas. Primer grado. Recortable, México, SEP, 1999.
Matemáticas. Segundo grado. Recortable, México, SEP, 1999.

Secundaria

Materiales para profesores

Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria, México, SEP, 2000.
La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Guía de estudio. Primer nivel, México, SEP-Pronap, 1996.
La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas. Primer nivel, México, SEP-Pronap, 1996
La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria, México, SEP-Pronap,1996 (tres audiocintas).
La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Presentación del curso. Primer nivel, México, SEP-Pronap, 1996 (videocinta).
La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Primer nivel, México, SEP-Pronap, 1996 (video de apoyo, I).
Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria, México, SEP, 2001.
Plan y programas de estudio. 1993. Educación básica. Secundaria, México, SEP, 1998.
Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación secundaria, México, SEP, 2000.

Varios

Ávila, Alicia, *Los niños también cuentan. Procesos de construcción de la aritmética en la escuela primaria*, México, SEP, 1994 (Libros del Rincón).
Block, David *et al.*, *Lo que cuentan las cuentas de multiplicar y dividir. Propuesta para divertirse y trabajar en el aula*, México, SEP, 1994 (Libros del Rincón).

Block, David *et al.*, *Los números y su representación*, México, SEP, 1991 (Libros del Rincón).
Fuenlabrada *et al.*,*Juega y aprende matemáticas. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula*, México, SEP, 1992 (Libros del Rincón).
Fuenlabrada, Irma *et al.*, *Lo que cuentan las cuentas de sumar y restar. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula*, México, SEP, 1996 (Libros del Rincón).
Un reto más. Boletín semestral, México, SEP.

Biblioteca para la Actualización del Maestro y Biblioteca del Normalista

Casanova, María Antonia, *La evaluación educativa. Escuela básica*, España, SEP/Fondo Mixto/La Murralla, 1998.
Chevallard, Yves, Marianna Bosch y Josep Gascón, *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, España, SEP/Fondo Mixto/ICE/Universitat de Barcelona/Horsori, 1998.
Gardner, Howard, *La mente no escolarizada. Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar las escuelas*, España, SEP/Fondo Mixto/Paidós, 1997.
Hargreaves, Andy, Lorna Earl y Jim Ryan, *Una educación para el cambio. Reinventar la educación de los adolescentes*, México, SEP/Octaedro, 2000.
Monereo, Carles *et al.*, *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en el aula*, España, SEP/Fondo Mixto/Graó, 1998.
Saint-Onge, Michel, *Yo explico pero ellos...¿aprenden?*, México, SEP/FCE/Mensajero/Enlace editorial, 2000.

Colecciones de videos

Entre Maestros
El Mundo de las Matemáticas
Resuélvelo

Sitios en Internet

http://www.sep.gob.mx
http://redescolar.ilce.edu.mx
http://www.sep_secundaria.edu.mx
http://www.pronap.ilce.edu.mx
http://www.sepiensa.com.mx

Direcciones electrónicas

hbalbuena@sep.gob.mx
jcxique@sep.gob.mx
mdavila@sep.gob.mx
ipasos@sep.gob.mx
oliverab@sep.gob.mx

Sugerencias bibliográficas

Didáctica

Carraher, Terezinha, David Carraher y Analucía Schliemann, *En la vida diez, en la escuela cero*, México, Siglo XXI, 1992.

Gómez, Pedro, *Profesor, no entiendo*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1999.

Parra, Cecilia e Irma Sáinz (comps.), *Didáctica de matemáticas*, México, Paidós Educador, 1998.

Vergnaud, Gerard, *El niño, las matemáticas y la realidad*, México, Trillas, 2000.

Historia

Boyer, Carl B., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 1999.

Mankiewicz, Richard, *Historia de las matemáticas*, México, Paidós, 2000.

Perero, Mariano, *Historia e historias de matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1999.

Aritmética

Castro, Encarnación, *Estructuras aritméticas elementales y su modelación*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.

Ifra, G., *Las cifras*, Madrid, Alianza Editorial, 1987.

Peterson, John A., *Teoría de la aritmética*, México, Limusa-Noriega Editores, 1994.

Álgebra

Cedillo, Tenoch, *Sentido numérico e iniciación al álgebra*, 2a. ed., México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1999.

Grupo Azarquiel, *Ideas y actividades para enseñar álgebra*, Madrid, Síntesis, 1993.

Rojano, Teresa, *Aprendiendo álgebra con hojas electrónicas*, 2a. ed., México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.

Geometría

Arenas, J, *Geometría y experiencias*, México, Alhambra, 1997.

Dubnov, Ya S., *Errores de las demostraciones geométricas*, México, Limusa, 1996.

Fetisov, A. I., *La demostración en geometría*, México, Noriega-Limusa, 1991.

Moise, Ewin, Downs, *Geometría moderna*, Estados Unidos de América, Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.

Rivaud, Juan José, *Geometría intuitiva 2. Áreas, volúmenes y centros de gravedad*, México, Limusa-Noriega Editores, 1996.

_______, *Trigonometría*, México, Limusa-Noriega Editores, 1992.

Presentación y tratamiento de la información

Hoel, Paul G., *Estadística elemental*, México, CECSA, 1991.

Mendenhall, Williams, *Estadística matemática con aplicaciones*, 2a. ed., Grupo Editorial Iberoamérica, 1999.

Scheaffe, Richard L., *Elementos de muestreo*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1999.

Nociones de probabilidad

Garza, Tomás, *Probabilidad y estadística*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.

Laplace, Pierre Simón de, *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*, México, Alianza Editorial/SEP, 1997.

Perry, Patricia Inés, *Matemáticas, azar, sociedad*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1999.

Varios

Baillif, J.C., *Los rompecabezas lógicos de Baillif*, España, Reverté, 1987.

Bolt, Brian, *Más actividades matemáticas*, España, Labor, 1998.

Corbalán, F., *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*, Síntesis, 1994.

Corbalán, F., *La matemática aplicada a la vida cotidiana*, Barcelona, Graó, 1995.

Miller, Charles D., y Vern E. Heeren, *Matemática: razonamiento y aplicaciones*, México, Pearson-Addison Wesley, 1999.

Tahan, Malba, *El hombre que calculaba*, México, Noriega Editores, 1994.

Bibliografía consultada y créditos de ilustración

Alarcón, J. *et al.*, *Matemáticas 1, 2 y 3 para la enseñanza media básica*, México, SEP-FCE, 1993.

Allen Paulos, John, *El hombre anumérico*, Barcelona, Tusquets, 1990.

Bastchelet, Edward, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, Berlín, Springer Verlag, 1979.

Boyer, Carl B. y Uta C. Merzbach, *A History of Mathematics*, Nueva York, John Wiley & Sons, 1989.

Eves, Howard, *Estudio de las geometrías* (dos tomos), México, UTEHA, 1969.

Glaeser, Georges, *Matemáticas para el profesor en formación*, Buenos Aires, Eudeba, 1977.

Irem de Estrasburgo, *Mathematiques 6eme, 5eme, 4eme y 3eme*,París, Istra.

Moise, E. Edwin y Foyd L. Downs, *Geometría moderna*, EU, Addison Wesley Iberoamericana, 1986.

Musser, Gary L. y William F. Burguer, *Mathematics for Elementary Teachers*, Nueva York, Macmillan Publishing Company, 1988.

Rivaud, Juan José, *Trigonometría*, México, Limusa, 1981.

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Tales", *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, España, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 1991.

Tahan, Malba, *El hombre que calculaba*, México, Limusa, 1968.

Wentworth, Jorge y David Eugenio Smith, *Geometría plana y del espacio*, México, Porrúa, 1988.

Zeisel, Hans, *Dígalo con números*, México, FCE, 1980.

Créditos de ilustración

Almanaque mundial 1982, Panamá, América, 1981, pp. 70, 302.

Almanaque mundial 1991, Panamá, América, 1990, pp. 302, 306 arriba.

Almanaque mundial 1993, Panamá, América, 1992, pp. 70, 305, 318.

Antiguas civilizaciones: la escritura, España, UTEHA, 1981, p. 200.

Antiguas civilizaciones: Grecia, España, UTEHA, 1981, pp. 205, 208.

Batschelet, Edward, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3a. ed., Berlín, Springer Verlag, 1979, pp. 97, 319.

Boyer, Carl B., A *History of Mathematics*, 2a, ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1989, pp. 46, 58,72 arriba, 73 abajo, 201.

El cuerpo humano, 2a. ed., México, Time Life (Colección científica),1980, pp. 310, 311, 339.

Hollingdale, Stuart,*Makers of Mathematics*, Inglaterra, Penguin Books, 1989, p. 347.

Investigación y Ciencia (versión en español del *Scientific American*), núm. 93, junio de 1984, Barcelona, España, p. 292.

Investigación y Ciencia (versión en español del *Scientific American*), núm. 105, abril de 1986, Barcelona, España, p. 313.
Investigación y Ciencia (versión en español del *Scientific American*), núm. 108, septiembre de 1985, Barcelona, España, p. 312.
Investigación y Ciencia (versión en español del *Scientific American*), núm. 116, mayo de 1986, Barcelona, España, p. 315.
Investigación y Ciencia (versión en español del *Scientific American*), núm. 123, diciembre de 1986, Barcelona, España, pp. 314, 343.
La población de México en 1990, México, Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, 1992, pp. 294, 295.
Matemáticas 1. Enseñanza media básica, México, SEP-FCE, 1991, pp. 352, 355.
Matemáticas en el mundo; selecciones del Scientific American, Madrid-Barcelona, Blume, 1974, pp. 51, 66.
Newman, James R. (comp.), *Sigma, el mundo de las matemáticas*, Buenos Aires-México, Grijalbo, 1980, pp. 73 arriba, 74-76 (únicamente los numerales antiguos, hindúes, árabes y europeos), 202, 203.
Rogers, Eric, M., *Physics for the Inquiring Mind*, 12a. ed., Princeton University Press, 1977. pp. 101, 336 arriba.
Scott Woomis, Elisha, *The Pytagorian Proposition*, NCTM, Classics, 1972, p. 276.
La Recherche, núm. 255, junio de 1993, Francia.
Wolchovok, Louis, *The Art of Threedimensional Design*, Nueva York, Dover Publication, 1969, p. 282.

Libro para el maestro. Matemáticas.
Educación secundaria
se imprimió por encargo
de la Comisión Nacional de Libros
de Texto Gratuitos,
en los talleres de
con domicilio en
el mes de de 2004.
El tiraje fue de ejemplares
más sobrantes para reposición.

El cuidado de la edición estuvo a cargo de
la Dirección Editorial de la Dirección General
de Materiales y Métodos Educativos de
la Secretaría de Educación Pública.